



Le brassage turbulent dans les fours à induction

Eric Taberlet

► To cite this version:

Eric Taberlet. Le brassage turbulent dans les fours à induction. Electromagnétisme. UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE; INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, 1984. Français. NNT: . tel-01339827

HAL Id: tel-01339827

<https://hal.science/tel-01339827>

Submitted on 30 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE

ET

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE
DE GRENOBLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR-INGÉNIEUR

par

Eric TABERLET

S U J E T

LE BRASSAGE TURBULENT DANS LES FOURS A INDUCTION

Soutenue le 12 Juillet 1984 devant la Commission d'Examen

M. LESPINARD

Président

M. BIRAT

M. FAUTRELLE

Examineurs

M. MOREAU

M. SZEKELY

Que tous ceux qui, par leur intervention ou leur soutien, m'ont aidé à mener à bien ce travail, trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

J'adresse également mes remerciements à toutes les personnes qui m'ont fait l'honneur d'accepter de participer au jury de cette thèse.

S O M M A I R E

INTRODUCTION	3
I.1. Position du problème	4
I.2. Principaux travaux antérieurs	7
I.3. Objectifs et moyens mis en oeuvre	9
PREMIERE PARTIE : LA SIMULATION EXPERIMENTALE	15
I.1. L'installation expérimentale	17
I.2. L'écoulement moyen	21
I.3. Turbulence de l'écoulement	25
I.4. Analyse et Interprétation des résultats	32
Annexe 1.- La distribution des forces électromagnétiques ..	41
Annexe 2.- Détermination de la zone d'inversion du profil des vitesses	44
DEUXIEME PARTIE : LA MODELISATION NUMERIQUE	71
II.1. Le modèle	77
II.2. Le problème des conditions aux limites	77
II.3. Résultats	78
Annexe 1.- Programme de calcul des écoulements turbulents incompressibles par le modèle k-ε	81
Annexe 2.- Calcul des nouvelles fonctions de paroi	99
TROISIEME PARTIE : MISE AU POINT D'UNE SONDE DIRECTIONNELLE POUR METAUX LIQUIDES	112
III.1. Généralités sur la vélocimétrie dans les métaux liquides ..	113
III.2. Description technologique du dispositif	115
III.3. Mesures de direction	117
III.4. Mesure du module de la vitesse	121
Annexe - Calcul théorique de la courbe d'étalonnage	125
CONCLUSION	145

INTRODUCTION

I N T R O D U C T I O N

L'induction électromagnétique, c'est-à-dire, la création de courants électriques induits dans un milieu conducteur soumis à un champ magnétique variable dans le temps, par sa souplesse d'emploi, offre en métallurgie de nouvelles perspectives intéressantes dans l'élaboration et le traitement des métaux. Citons les procédés de chauffage par induction largement utilisés au niveau industriel et également les procédés de coulées continues où l'induction engendre un brassage du métal durant sa solidification, ce qui améliore ses propriétés métallurgiques.

Du point de vue mécanique des fluides, une des conséquences intéressantes du phénomène d'induction, est la création au sein du fluide conducteur de forces de volume (dites de Laplace ou de Lorentz) résultant de l'interaction entre les courants induits et le champ magnétique d'excitation. Effectivement, à l'aide de paramètres facilement maîtrisables (comme l'intensité des courants inducteurs ou leur fréquence), on va pouvoir agir sur le métal liquide d'une part de façon contrôlée et d'autre part, sans aucun contact avec le fluide. Cette facilité d'action a déjà été mise à profit dans divers procédés tels que le formage électromagnétique [1], la séparation continue [2], la pulvérisation électromagnétique [3] etc...

Un four à induction, qui est en fait une poche de métal soumise à un champ magnétique alternatif, bénéficie de deux effets procurés par l'induction : le chauffage par effet Joule et le brassage, engendré par les forces électromagnétiques, du métal fondu.

Ce sont les conséquences du deuxième aspect de l'induction qui vont nous intéresser ici, à savoir, le mouvement turbulent du fluide brassé électromagnétiquement.

I.1. POSITION DU PROBLEME.

Les fours à inductions sont utilisés dans l'industrie comme poches de traitement (fonte, acier) pour réaliser certaines opérations d'affinage. Ce sont, par exemple, pour les bases fer, la désoxydation, la désulfuration, la dénitruration, etc...

Le procédé consiste à introduire dans le métal liquide un ferro-alliage qui réagit avec l'élément (l'oxygène, le soufre, l'azote) et forme un composé que l'on élimine hors du bain. La réaction chimique est accélérée par un brassage vigoureux et les produits de réaction sont ensuite éliminés par les parois ou la surface libre.

La connaissance de ces transferts de masse passe donc par la connaissance de la turbulence de l'écoulement et donc, d'une façon générale, par celle de l'hydrodynamique du four à induction. Les effets de la turbulence sont de deux natures selon que l'on considère les petites ou les grandes échelles du mouvement :

- les phénomènes de coalescence ou de germination font intervenir les microstructures de la turbulence (tourbillons de l'ordre de quelques dizaines de μm) ; ce type de processus est intrinsèque : il ne dépend pas de l'écoulement à grande échelle, donc de la géométrie du système.

- les transferts de masse aux parois et aux interfaces sont essentiellement reliés aux macrostructures de la turbulence (tourbillon de l'ordre du centimètre et plus) ainsi qu'à des propriétés spécifiques au voisinage de la paroi ; celles-ci influent sur les phénomènes de diffusion des divers contaminants (température, soluté, etc...) ; en conséquence, ce type de transfert dépend de la nature du procédé par sa géométrie, du mode de brassage (intensité et distribution des forces motrices) qui conditionneront les propriétés à grande échelle de la turbulence.

Dans ce deuxième cas, il apparaît donc nécessaire, pour comprendre les phénomènes, d'appréhender au mieux la nature réelle de l'écoulement.

Mis à part quelques tentatives de mesures faites dans un four réel par des visualisations à la surface libre [4], on est contraint, du fait des conditions thermiques défavorables (températures supérieures à mille degrés, rayonnement intense), de simuler le brassage, soit à l'aide

de maquettes expérimentales (avec des métaux liquides à basse température, notamment le mercure), soit à l'aide de modèles numériques. Le point commun de ces deux types de simulation est de se placer dans des conditions isothermes et ainsi, de ne s'intéresser qu'au couplage électromagnétisme-hydrodynamique.

Notons que ces conditions de simulation sont tout à fait réalistes puisque dans les fours réels, bien que le niveau de température soit plus élevé, du fait de l'intensité turbulente importante, les gradients de température restent faibles excepté dans les régions très proches des parois.

Les paramètres de similitude qu'il est important de maîtriser sont les suivants :

- Le paramètre d'écran

$$R_w = \mu \sigma \omega a^2$$

ou μ , σ , ω , a désignent respectivement la perméabilité magnétique du conducteur, sa conductivité électrique, la pulsation des courants inducteurs et le rayon du creuset. Ce paramètre contrôle la pénétration du champ magnétique dans le conducteur par effet de peau. L'épaisseur de peau correspondante, δ , est définie par :

$$\delta = \left(\frac{2}{R_w} \right)^{1/2}$$

- Un paramètre d'interaction des forces électromagnétiques

$$Re = \frac{u_a a}{\nu}$$

avec

$$u_a = \frac{B_0}{\sqrt{\mu \rho}} \quad (\text{Vitesse d'Alfvén})$$

où B_0 , ρ , ν , désignent respectivement une valeur typique du champ magnétique, la masse volumique du fluide et sa viscosité cinématique. Ce paramètre, défini comme le rapport des forces électromagnétiques aux forces de viscosité, rend compte de l'intensité I des courants inducteurs puisque, de façon générale, B_0 est proportionnel à I .

- Le nombre de Reynolds de l'écoulement

$$Re = \frac{u a}{\nu}$$

où u est une vitesse typique de l'écoulement.

On montrera plus tard que ces deux derniers paramètres sont équivalents ; c'est pourquoi, en anticipant, on les note de la même façon.

Outre les applications industrielles, le brassage électromagnétique présente l'originalité d'être un écoulement où l'on maîtrise la zone d'action des forces motrices (la peau électromagnétique) par un paramètre facilement contrôlable, la fréquence des courants inducteurs. On introduit ainsi dans la turbulence de l'écoulement une échelle déterminée : l'épaisseur de peau δ . Ce fait constitue une nouveauté par rapport aux écoulements classiques tels que écoulement en conduites, jets, etc...

1.2. PRINCIPAUX TRAVAUX ANTERIEURS.

Le brassage électromagnétique engendré par des courants sinusoïdaux monophasés (brassage répulsif) a déjà fait l'objet de nombreuses études. Les plus anciennes sont des modélisations assez simples où, soit par des raisonnements hydrauliques [5], [6], soit par des simulations expérimentales peu instrumentées [7], [8], ont été dégagés les principaux effets des paramètres sur l'écoulement moyen, ainsi que des ordres de grandeurs. Ce sont des études plus récentes, mettant en oeuvre des moyens plus sophistiqués (modèle numérique de turbulence plus élaboré, instrumentation plus poussée), qui ont permis de dégager de façon plus précise les caractéristiques de l'écoulement et surtout de la turbulence. On peut citer les études théoriques de Fautrelle [9], Hunt et Maxey [10] et, s'agissant de travaux expérimentaux, celles de Cremer et Alemany [11], Moore et Hunt [12], Koanda [13], Trakas [14].

Les points essentiels, qui ressortent de ces études et que l'on peut considérer comme définitifs, peuvent se résumer de la façon suivante :

- C'est la partie rotationnelle des forces électromagnétiques qui est responsable du mouvement, celle-ci pouvant se décomposer en partie moyenne et pulsatoire dans le temps. Pour des fréquences supérieures à 10 Hz, la partie pulsatoire a une incidence tout à fait négligeable sur l'écoulement [9], [10].

- L'écoulement moyen s'organise en général, dans un demi-plan méridien, en deux vortex contre-rotatifs, leur taille dépendant grandement de la position du creuset par rapport à l'inducteur [12] et sensiblement du paramètre R_w dans la gamme explorée [14]. Cependant, cet écoulement moyen présente une grande instabilité, ce qui conduit à l'existence d'oscillations de longues périodes [12], [14].

Le paramètre R_e (c'est-à-dire l'intensité des courants inducteurs) n'influe pas sur la structure de l'écoulement mais sur l'amplitude des vitesses, celle-ci variant linéairement avec ce paramètre [12], [13], [14].

L'influence du paramètre R_w sur l'intensité du brassage est moins bien connue. Fautrelle [15] prédit numériquement une croissance de l'amplitude des vitesses à basse fréquence, puis un maximum de brassage pour $R_w \approx 40$ et ensuite une décroissance à haute fréquence. Une analyse faite par d'autres auteurs [16], [17] prévoit un comportement asymptotique de l'amplitude des vitesses en $R_w^{-1/4}$ pour le cas des hautes fréquences.

La croissance de la vitesse pour les faibles valeurs de R_w a été confirmée expérimentalement par Trakas [14] jusqu'à $R_w \approx 20$. Bednarz [7], en explorant une gamme plus large (jusqu'à $R_w = 65$) a mis en évidence un maximum de brassage pour $R_w \approx 15$. Aucune exploration systématique permettant de définir la tendance asymptotique n'a été faite pour des plus grandes valeurs de R_w .

- Les connaissances sur la turbulence de l'écoulement sont moins nombreuses. Les spectres de turbulence montrent que celle-ci a une signature identique à la turbulence classique des écoulements cisailés [14], ce qui justifie l'emploi de modèles classiques de turbulence pour le calcul numérique. Seule l'influence du paramètre R_e sur les caractéristiques de la turbulence a été abordée. L'étude la plus complète est celle de Trakas faite pour les faibles valeurs du paramètre R_w . On peut la résumer comme suit :

- la vitesse turbulente définie par $u^1 = (\overline{u^2})^{1/2}$ varie linéairement avec ce paramètre (résultat également confirmé par Koanda à haute fréquence [13]).
- L'échelle intégrale est indépendante de R_e , ce qui fait apparaître une autosimilarité des spectres vis à vis de ce paramètre.
- La densité d'énergie spectrale varie comme R_e^2 ce qui est cohérent avec le premier résultat.
- Les caractéristiques de la turbulence sont identiques en tout point du creuset ; ce qui fait apparaître pour ces basses fréquences une homogénéité des propriétés de la turbulence dans tout le creuset.

- Enfin, on peut encore mentionner que les confrontations qui ont été faites jusqu'ici entre prédictions numériques et résultats expérimentaux se sont montrées tout à fait satisfaisantes à basse fréquence, en ce qui concerne l'écoulement moyen et l'intensité turbulente [18], [19].

1.3. OBJECTIFS ET MOYENS MIS EN OEUVRE.

L'énumération de ces principaux travaux antérieurs montre qu'il existe déjà une connaissance approfondie de l'hydrodynamique des fours à induction.

Néanmoins, il demeure encore des incertitudes sur le comportement de l'écoulement moyen et de la turbulence à toutes les fréquences et notamment, en ce qui concerne le cas des faibles peaux électromagnétiques (c'est-à-dire le cas des hautes fréquences). En effet, dans ce dernier cas, la peau électromagnétique constitue une région singulière de l'écoulement où s'effectue un équilibre local entre force motrice et frottement [17] ; et il n'est pas du tout sûr que dans ce cas de figure, les modèles classiques de turbulence restent valides.

En second lieu, nous avons vu que la motivation de l'étude de l'écoulement dans les forces à induction était le problème des transferts turbulents qui régissent les réactions chimiques au sein du bain ; d'où la nécessité de bien caractériser la turbulence. Or, jusqu'ici, les résultats expérimentaux disponibles n'ont pas permis de tester les modèles numériques de turbulence utilisée (type $k-\epsilon$ par exemple), en particulier leur aptitude à prédire les caractéristiques de la turbulence (distribution des échelles, du taux de dissipation, etc...).

Le travail présenté dans le présent mémoire a pour perspectives :

- premièrement, de compléter les connaissances acquises dans ce domaine en étudiant l'influence des paramètres fréquence (soit R_w) sur l'écoulement moyen et sur la turbulence, ceci en couvrant une large gamme de valeurs, afin de cerner au mieux les conséquences qu'engendrent l'introduction d'une région singulière (la peau électromagnétique) dans un écoulement turbulent.
- deuxièmement, de caractériser de façon la plus précise possible, la turbulence de l'écoulement, afin de fournir des données fiables pour l'interprétation et la modélisation du phénomène.

La partie expérimentale de ce travail a été réalisée dans l'installation déjà utilisée pour une précédente thèse (Koanda [13]). On pourra se référer à cette étude pour tout ce qui concerne une description détaillée de l'installation, ainsi que pour certaines mesures de champ magnétique et de température qui n'ont pas été reprises ici. Les modifications apportées concernent uniquement les alimentations qui ont permis ainsi d'explorer quatre fréquences : 50 Hz, 380 Hz, 2100 Hz et 4700 Hz.

Du point de vue instrumentation, la mesure de la vitesse instantanée et locale a été faite à l'aide de l'utilisation de sondes à film chaud quartzé. L'acquisition et le traitement des données ont été effectués sur un micro-ordinateur jouissant de programmes performants de calculs mis au point par d'autres utilisateurs (P. Capéran et J. Sommeria). Pour déterminer sans ambiguïté l'organisation de l'écoulement moyen, un nouveau type de mesure, basée sur la détection d'un sillage thermique à l'aide d'une sonde à deux films, a été mis au point.

Les résultats expérimentaux obtenus et leur interprétation font l'objet de la première partie de ce mémoire.

Le travail numérique a été réalisé à partir d'un code de calcul déjà existant développé à l'Imperial College (Programme Teach), basé sur un modèle de turbulence dit $k-\epsilon$. Les résultats obtenus et la confrontation avec les mesures sont présentés en deuxième partie.

Une description détaillée du code de calcul est donnée en annexe à cette partie.

Enfin, le système de détection d'un sillage thermique issu d'une source de chaleur a pu être généralisé pour la mesure de la direction, du sens et du module du vecteur vitesse grâce à un dispositif mis au point par Messieurs Bolcato, Corne et Ernst du GIS-MADYLAM. Cette sonde directionnelle a permis de confronter les résultats expérimentaux obtenus à partir des mesures faites par anémométrie au film chaud. Son efficacité démontrée, c'est un outil sur lequel on pourra compter désormais pour l'étude des écoulements recirculants en milieu opaque. En conséquence, son emploi dépasse le cadre du four à induction.

La description de cette sonde, ainsi que les essais effectués, sont traités en troisième partie de cette thèse.

La conclusion nous permettra de faire la synthèse de ces différents résultats et de résumer d'une façon générale la connaissance actuelle sur l'hydrodynamique des fours à induction.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ETAY J. : "Le formage électromagnétique des métaux liquides".
Thèse de Docteur-Ingénieur, 24 juin 1982, présentée à l'U.S.M.G. et l'I.N.P.G.
- [2] MARTY Ph. : "Séparation électromagnétique continue".
Thèse de docteur-ingénieur, 27 avril 1982, présentée à l'U.S.M.G., et l'I.N.P.G.
- [3] ALEMANY A. : "MHD à l'échelle du laboratoire. Quelques résultats, quelques applications".
Doctorat d'Etat, 14 mars 1978, présenté à l'U.S.M.G. et l'I.N.P.G.
- [4] EL-KADDAH N., SZEKELY J. and CARLSSON G. : "Fluid flow and mass transfer in an inductively stirred four ton melt of molten steel".
A paraître.
- [5] TIR L.L., 1976 : "Features of mechanical energy transfer to a closed metal circuit in electromagnetic systems with azimuthal currents".
Magnit. Gidrod., 12, 100-109.
- [6] MOREAU R., 1978 : "MHD flows driven by alternating magnetic field".
Proc. 2nd Bear-Sheva Seminar on MHD-flows and turbulence, H. Branover ed. Israel Univ. Press. 65-82, 1980.
- [7] BEDNARZ T., 1970 : "An experimental investigation of electromagnetic stirring in a coreless induction furnace".
Carnegie Mellow University, Ph. D. Thesis.
- [8] TARAPORE E., EVANS J.W., 1976 : "Fluid velocities in induction melting furnace : Part. I. Theory and Laboratory Experiments".
Trans. Met. Soc. AIME, 7B, 343.
- [9] FAUTRELLE Y., 1981 : "Analytical and numerical aspects of the electromagnetic stirring induced by alternating magnetic fields".
J. Fluid Mech. Vol. 102, 405-430.
- [10] HUNT J.C.R., MAXEY M.R., 1978 : "Estimating velocities and shear stresses in turbulent flows".
Proc. 2nd Bear-Sheva seminar on MHD-flows and turbulence, H. Branover ed. Israel Univ. Presse 1980.

- [11] CREMER P., ALEMANY A., 1981 : "Aspects expérimentaux du brassage électromagnétique en creuset".
J. de Mec. Appl., 5, 35-50.

- [12] MOORE D.J., and HUNT J.C.R., 1981 : "Electromagnetic stirring in the coreless induction furnace".
Proc. 3rd Beer-Sheva symposium on MHD-Flows and turbulence, Ed. A. Branover and A. Yakhot,
Israël University Press.

- [13] KOANDA S., "Etude expérimentale du brassage électromagnétique dans un four à induction à creuset".
Thèse de 3ème cycle, 27 septembre 1982, présentée à l'U.S.M.G. et l'I.N.P.G.

- [14] TRAKAS C. : "Etude expérimentale du brassage électromagnétique dans le four à creuset".
Thèse de Docteur-ingénieur, 7 octobre 1982, présentée au C.N.A.M.

- [15] FAUTRELLE Y. : "Deux aspects de la magnétohydrodynamique la dynamo-convective, le brassage
dans les fours à induction".
Doctorat d'Etat, 29 mars 1982, présenté à l'U.S.M.G. et l'I.N.P.G.

- [16] LILLICRAP D.C. and MOORE D.J., 1982 : "Electromagnetic stirring in coreless induction furnace".
Proc. of electroheat for metal conference, Cambridge, England.

- [17] KOANDA S. and FAUTRELLE Y., 1982 : "Modelling of coreless induction furnace : some theoretical and
experimental results".
Proc. of the IUTAM Symposium on Metallurgical Application of MHD, Cambridge (U.K.)

- [18] EVANS J.W. and LYMPANY S.D., 1983 : "An improved mathematical model for melt flow in induction
Furnaces and comparison with experimental data".
Met. Trans. B Vol. 14B, 306-307.

- [19] EL-KADDAH N., and SZEKELY J., 1983 : "The turbulent recirculation flow field in a coreless
industrial furnace. A comparison of theoretical predictions with measurements".
J. Fluid Mech., 133-37.

PREMIERE PARTIE

LA SIMULATION EXPÉRIMENTALE

I.1. L'INSTALLATION EXPERIMENTALE

I.1.1. Le four à induction :

L'installation consiste en un creuset cylindrique en inox placé dans un solénoïde de 15 spires et rempli de mercure. Le creuset a un rayon interne $a = 100$ mm et une épaisseur $e = 1$ mm. La hauteur de mercure est $H = 140$ mm. La localisation du bain par rapport à l'inducteur est schématisée en figure 1.

L'inducteur est alimenté par différentes sources (Générateur MF, Alternateur) qui peuvent fournir un courant sinusoïdal de différentes fréquences dans la gamme 50 Hz à 5000 Hz (Tableau 1). La valeur maximale de référence du champ magnétique est déduite de la formule de Nagaoka, soit :

$$(1) \quad B_0 = 2^{\frac{1}{2}} \mu NI/H_c (1 + 0.88 a_c/H_c)$$

où H_c , a_c , N désignent respectivement la hauteur, le rayon et le nombre de spires de la bobine. La valeur B_0 est utilisée pour calculer la vitesse d'Alfven u_a dont la gamme décrite est indiquée dans le tableau 1.

Fréquence f (Hz)	$R_w = \mu \sigma 2 \pi f a^2$	Epaisseur de peau δ / a	Vitesse d'Alfven u_a (cm/s)
50	3.9	0.7	$u_a < 28$
380	30.0	0.26	$u_a < 18.5$
2100	166.	0.11	$u_a < 12.3$
4700	372.	0.07	$u_a < 12.3$

Tableau 1.

Afin de contrôler la température du bain, le creuset est refroidi en permanence par un circuit d'eau. Du fait de l'intensité turbulente élevée, les variations de températures dans tout le bain sont inférieures à 1°C comme le montrent de précédentes mesures [1]. Les acquisitions sont lancées lorsque la température du bain a atteint un régime stationnaire, soit environ une demi-heure après le démarrage du brassage.

1.1.2. L'instrumentation.

L'investigation du champ de vitesse dans un écoulement de métal liquide recirculant nécessite deux types d'informations complémentaires :

- (i) la détermination de la configuration de l'écoulement
- (ii) l'amplitude des vitesses moyenne et turbulente.

Aussi, deux dispositifs ont été utilisés.

**La sonde directionnelle.*

Le sens de l'écoulement peut être déterminé localement en utilisant un système qui consiste à traquer le sillage thermique derrière une source de chaleur. L'émetteur de chaleur est un film chaud alors que le récepteur est une sonde de température. Nous avons en fait utilisé des sondes à deux films dont la géométrie nous permettait de déterminer le signe d'une vitesse, soit purement radiale, soit purement verticale (Fig. 2). Un exemple d'une telle mesure le long de l'axe du creuset et le long de la paroi est donné en figure 3. L'exploration montre sans ambiguïté le point de séparation entre les deux vortex.

Cette sonde a été généralisée pour la mesure dans une direction quelconque ainsi que pour la détermination du module de la vitesse. Bien qu'elle n'ait pas été utilisée pour les mesures qui suivent, cette sonde améliorée a permis ultérieurement de confirmer ces mesures (cf 3ème partie).

**L'anémométrie.*

Une sonde à film chaud cylindrique miniature (diamètre $\approx 100 \mu\text{m}$) alimentée par un anémomètre à température constante a servi à obtenir le module des vitesses moyenne et turbulente et les spectres temporels. Le traitement du signal a été fait sur un micro-ordinateur AM. Les étalonnages ont été effectués dans l'installation expérimentale de Capéran (cf 3ème partie).

Une attention particulière a été portée en ce qui concerne l'état de propreté de la sonde. La courbe d'étalonnage de la sonde mise sous la forme

$$(2) \quad 2\pi k_f l \Delta T ((R/E^2)_u = 0 - (R/E^2)_u) = A u^n,$$

où

u est la vitesse

E la tension mesurée

R la résistance de la sonde

A et n deux constantes de calibration

k_f la conductivité thermique du fluide

l la longueur du film

ΔT la surchauffe de la sonde

conduit à une courbe indépendante de l'état d'encrassement de la sonde [2]. Ceci est illustré en figure 4 où l'on a porté les résultats d'un étalonnage où l'encrassement a été provoqué à dessein (résultats sous forme $E = E(u)$ figure 4.a) et où la forme (2) permet de concentrer les points autour d'une courbe unique (fig. 4.b).

Dans la relation (2), le rapport $(E^2/R)_{u=0}$ représente le flux thermique quand la vitesse est nulle, c'est-à-dire le flux de conduction pure. Sa valeur ne peut être fixée qu'en début et en fin d'expérience lorsque le mercure est à l'arrêt. La comparaison entre les valeurs mesurées avant et après l'expérience permet d'ailleurs de s'assurer que l'état d'encrassement de la sonde n'a pas varié durant l'acquisition des mesures. Afin d'utiliser la relation (5), il a été nécessaire de s'assurer que l'échauffement du mercure (pouvant atteindre 20°C) par effet Joule, quand il est brassé, n'affectait pas la valeur de $(E^2/R)_{u=0}$. Un étalonnage de ce flux de conduction pour différentes températures a montré que pour de telles variations de température, $(E^2/R)_{u=0}$ ne variait pas.

Malgré toutes ces précautions, la relation (5) montre qu'une erreur relative de 1 % sur la valeur de $(E^2/R)_{u=0}$ entraîne une erreur d'environ 6 % sur la vitesse. Dans toutes les séries d'essais réalisés la dispersion des valeurs de $(E^2/R)_{u=0}$ entre valeur initiale et finale était en moyenne de 2 à 3 %, ce qui ne nous permet pas d'espérer une précision meilleure que 15 à 20 % de la vitesse par rapport à la courbe d'étalonnage.

Afin de minimiser la pollution du signal vitesse par les fluctuations de température, on a intérêt à choisir la surchauffe la plus grande possible. Cependant on est limité par les effets de convection naturelle qui s'accroissent avec la surchauffe. Rappelons que celle-ci est définie par :

$$\frac{R - R_0}{R_0} \approx \alpha \Delta T$$

où R_0 est la résistance de la sonde à température ambiante, R la résistance affichée qui engendrera une élévation de température ΔT et α un coefficient dépendant de la nature du conducteur.

Un étalonnage du flux de conduction $\frac{E_o^2}{R}$ pour différentes surchauffes a montré que l'effet de convection naturelle commençait à intervenir d'une façon sensible pour une surchauffe supérieure à 8 % (la courbe cesse d'être linéaire pour cette valeur). La surchauffe utilisée dans nos essais a donc été fixée à 7.5 %.

La figure (27) montre qu'excepté au voisinage de la surface libre (jusqu'à 5 mm de profondeur) où la conduction devient anisotrope, la valeur de $\frac{E_o^2}{R}$, pour cette surchauffe, est indépendante de la profondeur. Sa mesure ne sera donc nécessaire qu'en seul point du creuset.

Les fluctuations de température les plus importantes se rencontrent à haute fréquence (faible peau électromagnétique) au voisinage de la paroi. Celles-ci introduisent alors une incertitude sur la valeur de la surchauffe. Les variations de résistance engendrées par ces fluctuations de température de l'ordre de 0.02Ω introduisent une erreur d'environ 5 % sur la valeur de la surchauffe, d'où, d'après la courbe d'étalonnage, une incertitude de 7.5 % sur la vitesse en plus de l'incertitude sur E_o déjà mentionnée. On s'aperçoit donc qu'à hautes fréquences, au voisinage de la paroi, les mesures de vitesse seront sujettes à plus d'erreurs que dans les autres cas.

On a pu s'assurer cependant que le signal vitesse mesuré dans cette région n'était pas trop pollué par les fluctuations de température (qui introduisent des fluctuations de surchauffe) en faisant varier la surchauffe. En effet, si on écrit que les variations de tension de la sonde e' sont dues à la fois aux variations de vitesse u' et de chauffe θ' , d'après la relation (2) on obtient :

$$2 \frac{e'}{E} = n \frac{u'}{u} + \frac{\theta'}{\Delta T}$$

Les résultats obtenus ont montré que les variations de surchauffe ΔT n'introduisaient aucune variation sensible de la valeur $\frac{e'}{E}$, ce qui laisse supposer que le dernier terme de la relation ci-dessus est négligeable par rapport aux fluctuations de vitesse.

I.2. L'ÉCOULEMENT MOYEN

I.2.1. Configuration.

A l'aide de la sonde directionnelle, nous avons pu déterminer l'allure générale de l'écoulement moyen. La procédure consiste à explorer dans un demi-plan méridien, l'axe et une verticale près de la paroi à l'aide de la sonde à films superposés et une verticale à mi-rayon à l'aide de la sonde à films juxtaposés. L'incertitude sur la localisation du point de séparation des vortex est d'environ 1 cm.

L'évolution de la configuration a été étudiée en fonction de l'intensité du courant inducteur et de sa fréquence.

**Influence de l'intensité.*

La figure 5 montre une exploration obtenue sur l'axe du creuset à 50 Hz, pour deux intensités du courant. La configuration est globalement inchangée. Ce résultat a été vérifié également pour les trois autres fréquences : 380 Hz, 2100 Hz, 4700 Hz. La configuration paraît donc être indépendante de l'intensité, résultat en accord avec d'autres mesures antérieures [1], [2].

**Influence de la fréquence.*

L'influence de la fréquence a été étudiée pour $f = 50, 380, 2100$ et 4700 Hz. Les épaisseurs de peau correspondantes sont indiquées dans le tableau 1. La figure 6 présente les configurations observées. Elles consistent en deux ou quatre vortex dans un plan méridien suivant la fréquence.

Il est difficile d'interpréter précisément l'évolution de la configuration de l'écoulement. En effet, la distribution des forces électromagnétiques dépend grandement de la fréquence des courants inducteurs. Ceci est très clair sur les calculs numériques de ces forces obtenues dans la même géométrie (cf Annexe 1) et illustrée par les figures 23, 24, 25, 26. L'allure de ces écoulements est globalement en accord avec de précédentes études [1], [2], [3].

1.2.2. Profils de vitesse

Les mesures de vitesses ont été obtenues à l'aide de sondes à film chaud. Du fait de la faible sensibilité directionnelle de tels capteurs (voir par exemple [4]), il est important de choisir les régions où les mesures sont significatives. Aussi a-t-il été décidé d'explorer radialement au coeur des vortex où la vitesse est pratiquement verticale. L'emploi d'une sonde coudée autorisait l'accès aussi bien aux vitesses ascendantes que descendantes.

On a pu constater expérimentalement que la mesure de la vitesse exigeait une longue durée d'intégration pour éviter une grande dispersion des résultats. Cette source d'imprécision est due à l'existence de longues périodes de fluctuations (voir paragraphe 1.3 plus loin).

Comme dans le paragraphe précédent, l'influence de l'intensité et de la fréquence des courants sera considérée séparément.

*Influence de l'intensité.

La figure 7 montre l'évolution de la vitesse caractéristique u_0 obtenue en moyennant spatialement la valeur absolue de la vitesse le long de l'axe. Dans ce régime turbulent considéré dans notre expérience, la vitesse est trouvée variant linéairement avec l'intensité du courant inducteur. Ce résultat rejoint ceux d'autres expérimentations [1], [2], [3].

*Influence de la fréquence.

Tenant compte de la linéarité entre vitesse et intensité du courant, il est judicieux de normaliser la vitesse par la vitesse d'Alfvén u_a . Les distributions spatiales de la composante verticale de la vitesse moyenne u_z , sont présentées en figures 8, 9, 10, 11.

La zone d'inversion du signe de la vitesse a été déterminée à l'aide de la sonde directionnelle. Les courbes en traits pleins sont des courbes enveloppes des points expérimentaux et qui vérifient la conservation du débit. Quelques dispersions apparaissent près du point d'inversion. C'est une conséquence de la valeur élevée de l'intensité turbulente locale. De même, pour les fréquences 2100 Hz et 4700 Hz, les points expérimentaux près de la paroi présentent une dispersion par rapport à la courbe enveloppe. On montrera plus loin que dans ces régions, l'intensité turbulente est beaucoup plus élevée que pour les basses fréquences d'une part, et d'autre part on a vu que la précision des mesures était moins bonne dans cette région de l'écoulement.

La forme des profils est assez semblable pour toutes les fréquences. Le point de vitesse nulle est localisé approximativement à $r/a = 0.7$. Seule l'amplitude de ces profils diffère d'une fréquence à une autre.

On peut à partir de ces profils calculer les débits qui recirculent dans chaque tourbillon. On définit ainsi des vitesses débitantes dans la région centrale de l'écoulement, u_c , et dans la région pariétale, u_w , telles que :

$$(3) \quad u_c = \frac{2}{a_0^2} \int_0^{a_0} r u_z dr$$

$$u_w = \frac{2}{a^2 - a_0^2} \int_{a_0}^a r u_z dr$$

où a_0 est le rayon pour lequel la vitesse change de signe. Avec $a_0 \approx 0.7 a$ il est immédiat de montrer que

$$(4) \quad u_c \approx u_w$$

du fait de la conservation du débit.

Le tableau suivant donne les valeurs de u_c et u_w (normalisées par u_a) obtenues à partir des profils expérimentaux pour chaque tourbillon (noté supérieur et inférieur) et pour les différentes valeurs de R_ω .

R_ω	u_c/u_a Tourbillon supérieur	u_w/u_a Tourbillon supérieur	u_c/u_a Tourbillon inférieur	u_w/u_a Tourbillon inférieur
3.9	0.115	0.14	0.12	0.16
30.	0.16	0.24	0.23	0.22
166	0.14	0.26		
372	0.15	0.25	0.195	0.22

Tableau 2. — Valeur des vitesses débitantes u_c et u_w pour chaque tourbillon et pour différentes valeurs de R_ω .

Les valeurs du tableau montrent que l'égalité (4) n'est pas vérifiée avec une bonne précision, surtout pour les valeurs élevées de R_w . Il faut noter cependant que les valeurs de u_w sont sujettes à plus d'erreurs que celles de u_c ceci pour plusieurs raisons :

- d'une part, les points expérimentaux sont moins nombreux dans la région pariétale et sont entachés de plus d'erreurs.
- d'autre part, pour une même erreur sur la valeur de u_z , l'erreur engendrée sur la valeur de u_w est plus importante que sur u_c puisque les coefficients pondérateurs sont plus importants dans la zone pariétale que dans la zone centrale [cf relation (3)].

Enfin, on peut noter que l'intensité turbulente est plus élevée dans la zone pariétale que dans la zone centrale (et ceci est accentué pour les grandes valeurs de R_w , voir plus loin) ce qui induit plus d'incertitude sur les valeurs des vitesses près de la paroi.

En conséquence, nous ne considérerons que les valeurs de u_c , qui présentent une plus grande fiabilité.

La figure 12 présente les variations de u_c/u_a en fonction de R_w pour chaque tourbillon. La courbe présente un maximum pour $R_w \sim 30$ qui est la transition entre deux régimes. Un régime basse fréquence où la vitesse croît en fonction de R_w de façon assez prononcée et un régime haute fréquence où la vitesse décroît en fonction de R_w avec une pente relativement faible ($u_c \sim R_w^{-0.1}$).

Ces résultats sont en accord avec certaines conjectures théoriques [13], [5] et confirment expérimentalement l'existence d'un maximum de brassage.

I.3. TURBULENCE DE L'ÉCOULEMENT

I.3.1. Les fluctuations turbulentes.

Un simple enregistrement du signal délivré par l'anémomètre sur une longue durée a montré que celui-ci contenait des fréquences suffisamment élevées pour être attribuées à une turbulence organisée spatialement mais également de longues périodes (plusieurs minutes). Ces longues périodes sont illustrées par la figure 13 qui présente l'enregistrement sur une demi-heure de la tension délivrée par la sonde, le signal étant filtré en passe-bas à 0.10Hz. Ces basses fréquences ne semblent pas correspondre à des structures turbulentes physiques, mais plutôt à une instabilité de l'écoulement moyen.

L'hypothèse de Taylor nous permet de distinguer deux parties dans le contenu spectral du signal. En effet pour la turbulence organisée spatialement, seules les fréquences qui, compte tenu de l'hypothèse de Taylor, conduisent à des structures plus petites que la taille du creuset seront considérées, les fréquences plus basses étant alors attribuées à l'instabilité temporelle de l'écoulement moyen. Les vitesses moyennes considérées ici étant au moins de l'ordre de 1 cm/s, la fréquence de transition entre ces deux contenus spectraux est de l'ordre de 0.1 Hz.

L'analyse spectrale de ces basses fréquences a montré qu'elles ne contenaient pas de fréquences caractéristiques mais qu'elles avaient un spectre proche de celui d'un bruit blanc, quelles que soient l'intensité et la fréquence du courant inducteur.

L'énergie contenue dans ces basses fréquences représente environ 1/4 de l'énergie totale du signal.

L'étude de ces basses fréquences, n'étant pas inscrite dans un contexte théorique suffisamment développé, ne peut pas conduire à une utilisation pratique de ces données.

Au contraire, l'étude de la turbulence organisée spatialement conduit à une connaissance de l'écoulement qui est utile pour la compréhension des transferts dans les fours.

Dans toute la suite nous appellerons u' , la vitesse turbulente calculée à partir de la RMS du signal filtré en passe-haut à 0.1 Hz.

I.3.1.1. Variation de u' avec l'intensité.

La figure 14 montre que quelle que soit la fréquence, la variation de u' (ici moyennée spatialement sur l'axe du creuset) avec l'intensité du courant inducteur est linéaire. Ces résultats ont déjà été obtenus par d'autres expérimentateurs et confirment les prédictions théoriques [2], [5].

I.3.1.2. Profils de u'

Les profils de u' (normalisé par la vitesse d'Alfvén u_a), mesurés le long d'un rayon passant par le coeur d'un vortex pour différentes valeurs de R_ω (figure 15), présentent tous un niveau constant dans pratiquement tout le creuset avec une croissance près de la paroi. On peut cependant noter que la croissance est d'autant plus accentuée que la valeur de R_ω est élevée.

I.3.1.3. Variation de u' avec la fréquence.

La figure 12 montre les variations, en fonction de R_ω , de différentes quantités définies comme suit :

- u'_m est la vitesse turbulente moyennée le long d'un rayon passant par le coeur du vortex
- u'_w/u_w est l'intensité turbulente près de la paroi.

De la même façon que l'écoulement moyen, la vitesse turbulente u'_m passe par un maximum pour $R_\omega = 30$. L'évolution de u'_w/u_w est différente, il apparaît en effet une croissance de cette quantité pour les grandes valeurs de R_ω .

I.3.2. Les spectres de turbulence.

I.3.2.1. Description.

Les figures 16, 17, 18, 19 présentent des spectres monodimensionnels $F_{11}(k)$ mesurés près de la paroi verticale, là où la vitesse est maximale. Ils sont obtenus à partir du signal débarrassé des basses fréquences (filtré en passe haut à 0.1 Hz) et en faisant l'hypothèse de Taylor. Cette dernière

permet en effet une description spatiale de la turbulence en nombre d'onde k . Les spectres ont été compensés (multiplié par $k^{5/3}$) pour distinguer les zones de décroissance. L'aspect des spectres est le même pour les quatre fréquences envisagées, avec une zone de décroissance en $k^{-5/3}$ (correspondant au plateau) qui est interprétée comme étant une zone inertielle, puis une décroissance plus rapide ($\sim k^{-3}$) attribuée à une zone de dissipation. La zone d'injection n'est pas discernable sur de tels spectres monodimensionnels à cause de l'effet "d'aliasing", [6].

Les variations d'intensité du courant inducteur ne modifient pas la forme des spectres d'une façon sensible. Seul, le niveau du spectre est affecté (l'énergie totale égale à u'^2 devant varier effectivement en I^2). Notons cependant, que dans la gamme d'intensité couverte, le nombre de Reynolds de l'écoulement ne varie que d'un facteur 3 au maximum, ce qui n'est pas suffisant pour observer un élargissement du spectre vers les grandes valeurs de k d'une façon significative, d'où l'apparente auto-similarité des spectres avec l'intensité du courant déjà constatée par d'autres expérimentateurs [7].

1.3.2.2. Dissipation.

Généralement le taux de dissipation ϵ est déterminé en intégrant le spectre de dissipation,

$$(5) \quad \epsilon = 15 \nu \int_0^{\infty} k^2 F_{11}(k) dk$$

en supposant l'isotropie.

La contribution des nombres d'onde élevés à cette intégrale est très importante. Aussi est-il nécessaire de mesurer la zone de dissipation de façon précise. Or dans notre cas, du fait des dimensions finies de la sonde (longueur 0.5 mm), il n'a pas été possible d'appréhender les échelles plus petites que cette longueur. La figure 20 montre en effet que le spectre de dissipation $k^2 F_{11}(k)$ passe par un maximum au voisinage du nombre d'onde correspondant à l'échelle de la sonde (noté lw). Il est donc certain que la sonde introduit un filtrage qui ampute le spectre dans cette région. Afin d'obtenir des informations quantitatives à partir de ces spectres monodimensionnels, il a été nécessaire de lescaler dans la zone inertielle avec ceux mesurés dans une turbulence homogène et isotrope, tenant compte de l'équilibre local dans cette région du spectre. On peut alors déterminer le taux de dissipation ϵ dans cette région à partir de la loi de Kolmogorov :

$$(6) \quad F_{11}(k) = \alpha_1 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

La constante universelle α_1 est d'autant mieux définie que le nombre de Reynolds $R\lambda$ (construit à partir de l'échelle de Taylor λ) est grand. Pour des spectres obtenus à faible $R\lambda$ (~ 400), la zone inertielle s'étend sur environ une à deux décades en nombre d'ondes, et sa valeur peut être à peu près bien définie. La valeur que nous avons prise est celle mesurée dans des jets (Champagne [8]) et est égale à :

$$\alpha_1 \sim 0.48$$

A titre d'exemple, on donne ici les valeurs de ε calculé à partir du spectre mesuré en $r/a = 0.95$ pour $R_w = 3.9$ à l'aide des relations (5) et (6).

La relation (5) conduit à $\varepsilon = 0.45 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-3}$

La relation (6) conduit à $\varepsilon = 2.25 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-3}$

Il apparaît que (5) conduit à une sous-estimation d'un facteur 5 par rapport à (6).

La figure 21 présente les profils de ε (normalisé par u_a^3/a) mesurés le long d'un rayon passant par le coeur du vortex, pour différentes valeurs de R_w . Nous avons aussi porté les valeurs de ε obtenues après correction de l'hypothèse de Taylor due au fait que l'intensité turbulente était élevée (Lumley [9]). La correction est significative, en particulier au voisinage du coeur du vortex, où l'intensité turbulente atteint 100 %.

Les courbes présentent toutes le même aspect avec un accroissement de la dissipation au voisinage de la paroi qui s'accroît fortement pour les grandes valeurs de R_w .

La valeur moyenne adimensionnelle $\bar{\varepsilon}$ qui est calculée approximativement à partir de ces profils par :

$$(7) \quad \bar{\varepsilon} = \frac{2}{a^2} \int_0^a r \varepsilon(r) dr$$

permet une estimation de la puissance mécanique P_{em} qui est injectée, P_{em} étant relié à $\bar{\varepsilon}$ par :

$$(8) \quad P_{em} = \int_{V_0} \vec{u} \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) dv = \rho v_0 u_a^3/a \bar{\varepsilon}$$

où v_0 est le volume du bain.

Ainsi dans les conditions de notre expérience, la puissance mécanique injectée dans tous les cas n'était que de quelques milliwatts. Cette estimation est en parfait accord avec celle obtenue directement par :

$$(9) \quad P_{em} \sim \Pi (a^2 - (a - \delta)^2) H \times u_0 \times F_0$$

où l'ordre de grandeur des forces F_0 a été déterminé numériquement. La concordance entre les estimations (8) et (9) donne une certaine confiance aux valeurs expérimentales de ϵ .

1.3.2.2. Echelles de turbulence.

Une fois ϵ connu, trois types d'échelles peuvent en être déduits.

— L'échelle des grosses structures :

$$(10) \quad l = \frac{u'^3}{\epsilon}$$

— l'échelle de Taylor transversale λ telle que :

$$(11) \quad \epsilon = 15\nu \frac{u'^2}{\lambda^2}$$

— l'échelle des petites structures ou échelle de Kolmogorov :

$$(12) \quad \eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}$$

Ces échelles replacées sur les spectres permettent de s'assurer de la cohérence des résultats obtenus, en comparaison avec ceux de la turbulence homogène et isotrope.

La localisation de ces échelles ainsi que celle correspondant à la sonde, l_w , est faite sur les spectres (fig. 16, 17, 18, 19). Dans tous les cas, l'échelle des grosses structures l est située au début de la zone inertielle et l'échelle de Taylor, intermédiaire entre les grosses et petites structures, est située dans la zone inertielle, proche de la zone de dissipation qui débute aux environs de $k = 0.1 \eta^{-1}$. Ces résultats sont en accord avec ceux obtenus par d'autres expérimentateurs dans des écoulements turbulents correspondants aux mêmes valeurs de $R\lambda$ - (voir par exemple Hinze [10]).

La localisation de l'échelle de la sonde l_w , en début de zone de dissipation, confirme que cette zone n'est pas décrite de façon fiable.

- l'échelle intégrale.

La valeur en $k = 0$ du spectre monodimensionnel permet de définir l'échelle des structures énergétiques, appelée encore échelle intégrale, par :

$$(13) \quad L = \pi F_{11}(0)/u'^2$$

Le nombre d'onde $k = 0$ n'étant pas atteint, $F_{11}(0)$ correspond au fait à la valeur du palier obtenu pour les faibles nombres d'onde (cf [6]).

Cette échelle a également été portée sur les spectres (figures 16, 17, 18, 19). On peut noter que L est de l'ordre de l dans tous les cas, ce qui confirme encore la bonne prédiction des valeurs de ε .

De par sa définition (relation [13]), il est clair que L doit être indépendant de l'intensité I du courant inducteur, ce qui se vérifie de façon précise expérimentalement. On peut également le justifier de la façon suivante :

la relation (8) entraîne

$$(14) \quad \varepsilon \sim I^3$$

comme $u' \sim I$, d'après (10), on trouve

$$l \sim L \sim I^0$$

Une autre façon de le voir est d'invoquer le modèle de Prandtl qui postule que la vorticité des grosses structures turbulentes est de l'ordre de la vorticité de l'écoulement moyen qui génère ces grosses structures soit :

$$(15) \quad \frac{u'}{L} \sim \frac{u}{\Lambda}$$

où Λ est une échelle typique des gradients de la vitesse moyenne.

Or, comme on a vu (section I.2.), l'intensité des courants ne modifie en rien la géométrie de l'écoulement. Il est donc clair que Λ , et donc L d'après (15), sont indépendants de I .

Il appar it ainsi, que l'intensité du courant inducteur n'agit que sur les petites structures de la turbulence. La variation des petites échelles η s'obtient à partir de la relation (12), tenant compte de (14), on trouve :

$$\eta \sim I^{-\frac{3}{4}}$$

Cette variation n'a pas pu être vérifiée expérimentalement.

La figure 22 présente les profils de L mesurés le long d'un rayon passant au coeur du vortex pour différentes valeurs de R_w . Pour les valeurs modérées de R_w (3.9. et 30.), on retrouve la même valeur de l'échelle L à la paroi et sur l'axe. (La valeur de L au coeur du vortex n'est certainement pas significative du fait de l'intensité turbulente élevée dans cette région). Pour les valeurs élevées de R_w (166 et 372) on assiste à une décroissance globale de l'échelle intégrale, de l'axe à la paroi du creuset.

Dans tous les cas, la valeur de l'échelle reste de l'ordre du centimètre.

Dans le tableau 3, suivant, ont été portées les valeurs de la vorticité des grosses structures u'/L (normalisées par u_a/a) mesurée sur l'axe et près de la paroi, ainsi que les valeurs caractéristiques des échelles de gradients de l'écoulement moyen Λ (normalisé par a) correspondantes, déterminées à partir de la relation (15).

R_w	$\frac{u'}{L} / \frac{u_a}{a}$ sur l'axe	$\frac{u'}{L} / \frac{u_a}{a}$ à la paroi	$\frac{\Lambda}{a}$ sur l'axe	$\frac{\Lambda}{a}$ à la paroi
3.9	0.7	0.7	0.2	0.3
30	0.8	0.7	0.3	0.5
166	0.7	2.5	0.3	0.06
372	0.6	2.5	0.5	0.1

Tableau 3. — Evolution de la vorticité u'/L et de l'échelle correspondante Λ des gradients de l'écoulement moyen en fonction de R_w sur l'axe ($r/a = 0$) et près de la paroi ($r/a = 0.95$) au niveau du coeur du vortex.

Pour R_w valant 3.9 et 30. on trouve la même vorticité u'/L et la même échelle Λ à la paroi et sur l'axe, alors que pour les grandes valeurs de R_w , on trouve un accroissement de la vorticité près de la paroi et une diminution, d'un facteur 5, de l'échelle Λ . Ces résultats suggèrent qu'à haute fréquence, apparaît au voisinage de la paroi un mécanisme propre de production de turbulence qui serait donc corrélé à l'existence de la peau électromagnétique.

I.4. ANALYSE ET INTERPRETATION DES RESULTATS.

Résumons d'abord la connaissance essentielle que nous ont apportée ces résultats expérimentaux concernant l'influence des deux paramètres principaux Re et Rw sur l'écoulement et la turbulence, pour ensuite proposer une analyse de l'écoulement dans le cas des basses et des hautes fréquences.

I.4.1. Influence du paramètre Re .

Conformément aux résultats expérimentaux antérieurs, quelle que soit la fréquence, ce paramètre ne contrôle que l'amplitude des vitesses moyennes et turbulentes. La variation de ces vitesses est linéaire. Ce résultat justifie qu'on assimile ce nombre au nombre de Reynolds de l'écoulement. Il n'a aucune influence sur la configuration de l'écoulement moyen, ni sur les échelles intégrales de la turbulence. Ce paramètre n'agit que sur les petites échelles de la turbulence ($\eta \sim Re^{-3/4}$) puisqu'il contrôle la puissance mécanique injectée dans le fluide et donc le taux de dissipation ϵ .

En conséquence, toutes les variables u/u_a , u'/u_a , l/a , $\epsilon/u_a^3/a$ ne dépendent que du paramètre Rw .

I.4.2. Influence du paramètre Rw .

Ce paramètre permet d'agir de façon plus intéressante sur le fluide. En effet, la configuration de l'écoulement est très sensible à ce paramètre puisque c'est de lui dont dépend la distribution des forces motrices. Cependant la forme des profils radiaux de vitesse à travers le coeur d'un vortex n'est pas affectée de façon significative par le confinement des forces. En particulier, la zone d'inversion des vitesses se situe, dans tous les cas, à une distance d'environ $0.7a$ de l'axe de symétrie. Seule l'amplitude de ces profils est affectée. L'étude de la variation de l'amplitude avec la fréquence a mis en évidence l'existence de deux régimes d'écoulement :

- le régime à basse fréquence, où l'amplitude des vitesses est une fonction croissante du paramètre Rw
- le régime des hautes fréquences où l'amplitude décroît avec Rw .

La transition entre ces deux régimes se situe aux environs de $Rw = 30$, où l'amplitude passe par un maximum, conformément à des conjectures théoriques antérieures [5], [13].

En ce qui concerne la turbulence, ces deux régions se caractérisent par :

- à basse fréquence, la vitesse turbulente, le taux de dissipation et l'échelle intégrale sont distribués de façon à peu près homogène dans tout le bain ;
- à haute fréquence, une inhomogénéité apparaît dans la zone pariétale ; elle se traduit par une forte croissance de la vitesse turbulente, du taux de dissipation de la vorticité et d'une décroissance de l'échelle intégrale.

I.4.3. Analyse de l'écoulement à basse fréquence.

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$(16) \quad \vec{\omega} \wedge \vec{u} = - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} H + \frac{\vec{F}}{\rho} + \vec{\nabla} (2\nu_t \vec{e}) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

où $H = p + \rho u^2/2$, p désignant la pression, $\vec{\omega}$ la vorticité, \vec{e} le tenseur du taux de déformation, ν_t la viscosité turbulente.

L'intégration de (16) le long d'une ligne de courant fermée (C) entourant une surface (Σ) conduit à la forme modifiée du théorème de Batchelor [11], [12] soit :

$$(17) \quad \frac{1}{\rho} \int_{(\Sigma)} (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot d\vec{s} + \oint_{(C)} \vec{\nabla} \cdot (2\nu_t \vec{e}) \, d\vec{s} = 0$$

Dans le cas des basses fréquences, puisque les forces motrices sont réparties dans tout le bain ($\delta \sim a$), en dehors des couches limites l'unique échelle de longueur à considérer est l'échelle a .

Soient F_0 , u_0 les échelles de force et de vitesse, en considérant ν_t constant dans tout le bain (ce qui se justifie par l'homogénéité des caractéristiques de la turbulence dans tout le bain, mise en évidence expérimentalement) la relation (17) conduit à la relation entre échelles :

$$(18) \quad \frac{F_0}{\rho} = \nu_t \frac{u_0}{a^2}$$

Cette relation nous permet d'estimer la vitesse u_0 . Pour cela, écrivons l'amplitude de la force comme suit :

$$(19) \quad \frac{F_0}{\rho} = C \frac{u_a^2}{a}$$

où C est un coefficient numérique dépendant de R_w .

Estimons la viscosité turbulente par un modèle type longueur de mélange

$$(20) \quad \nu_t = u' \ell$$

en déduisant la vitesse turbulente du modèle de Prandtl par :

$$(21) \quad \frac{u'}{\ell} \sim \frac{u_o}{a}$$

relation pouvant également s'interpréter comme l'égalité entre le temps de retournement des grosses structures turbulentes et le temps de convection de l'écoulement moyen. (Cette relation se vérifie également assez bien expérimentalement - cf tableau 3). Cette relation montre en outre que la turbulence est engendrée par des gradients de vitesse à l'échelle du creuset.

Des relations (18), (19), (20), (21), on déduit :

$$(22) \quad \frac{u_o}{u_a} \sim C^{1/2} \frac{a}{\ell}$$

L'analyse proposée en annexe 1 montre que pour les faibles valeurs de R_w , le coefficient C est au moins de l'ordre de R_w^2 puisque au premier ordre, la force est uniquement pulsatoire. On en déduit donc à partir de (22) une loi de croissance en :

$$u_o \sim R_w$$

Cette loi n'a pas pu être vérifiée expérimentalement par manque de points pour les faibles valeurs de R_w .

Pour $R_w = 3.9$ le calcul numérique conduit à $C = 2.10^{-2}$ et les mesures à $a/\ell \sim 10$ d'où d'après (22) :

$$\frac{u_o}{u_a} \sim 1$$

La valeur expérimentale est : $\frac{u_o}{u_a} \sim 0.15$

Cette surestimation peut provenir de l'équation (21) qui sous-estime u'/ℓ comme le montrent les valeurs du tableau 3.

En reprenant l'équation (16) et en introduisant les échelles u_o , a , F_o et en tenant compte de la relation (18) on aboutit à l'équation adimensionnelle suivante :

$$\vec{\omega}_+ \wedge \vec{u}_+ = - \vec{\nabla} H_+ + \frac{1}{R_e^t} [\vec{F}_+ + 2 \vec{\nabla}_+ \cdot \vec{e}_+]$$

où $R_e^t = \frac{u_0 a}{v_t}$ est le nombre de Reynolds effectif de l'écoulement.

En tenant compte des relations (20), (21), (22), on trouve :

$$R_e^t = \left(\frac{a}{\ell}\right)^2$$

ce qui conduit pour $R_w = 3.9$ à $R_e^t = 100$.

En dehors des couches limites, au premier ordre, on a donc l'équilibre local :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{u} = - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} H$$

Dans un écoulement axysymétrique, cette relation conduit à une distribution de vorticité telle que :

$$(23) \quad \frac{\Omega}{r} = \text{cte} (\Psi)$$

le long d'une ligne de courant de valeur Ψ . (Ω composante de $\vec{\omega}$)

La distribution de vorticité à travers les lignes est r g e par la relation intégrale (17).

Le calcul présenté en annexe 2 montre qu'en assimilant la région au voisinage du coeur du vortex à des lignes de courants verticales la distribution de vorticité (23) conduit à un profil de vitesse dont la zone d'inversion (point de vitesse nulle) se situe à :

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

ce qui est en accord avec les mesures.

I.4.4. Analyse de l'écoulement à haute fréquence.

Dans le cas des hautes fréquences, la peau étant très fine, on peut décomposer l'écoulement suivant deux régions :

- la région pariétale où sont confinées les forces motrices et où les échelles suivant y , de l'ordre de δ , sont beaucoup plus petites que les échelles x , de l'ordre de a ((x, y)  tant un repère lié à la paroi, où x est la coordonnée longitudinale et y la coordonnée transverse).

Dans cette région l'approximation de la couche limite est donc tout à fait légitime.

- la région centrale, sans force motrice, où le nombre de Reynolds effectif reste grand.

Etudions séparément ces deux régions.

a) La région pariétale.

En se plaçant dans le repère lié à la paroi noté (x, y) , l'équation de la couche limite s'écrit :

$$(24) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{F}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

où τ est le taux de cisaillement.

Soient F_0 , u_0 , ρu_0^2 , τ_0 , δ , a les échelles respectivement de force, de vitesse, de pression, de contrainte, de longueur suivant y et de longueur suivant x . Comme la couche limite est turbulente, il est légitime d'assimiler l'échelle de vitesse u_0 à la vitesse de frottement u_* telle que

$$\tau_0 = \rho u_*^2$$

Dans le cas des faibles épaisseurs de la peau, l'expression de la force peut se mettre sous une forme explicite (Fautrelle [14]) :

$$(25) \quad F = \rho \frac{u_a^2}{a} f(x) e^{-2y/\delta}$$

où $f(x)$ est une fonction adimensionnelle représentant le potentiel vecteur électromagnétique à la paroi.

En introduisant les échelles considérées dans l'équation (24) et tenant compte de (25) on obtient l'équation adimensionnelle :

$$\frac{u_*^2}{a} \left[u_+ \frac{\partial u_+}{\partial x_+} + v_+ \frac{\partial v_+}{\partial y_+} + \frac{dp_+}{dx_+} \right] = \frac{u_a^2}{a} f(x) e^{-2y/\delta} + \frac{u_*^2}{\delta} \frac{\partial \tau_+}{\partial y_+}$$

Dans l'approximation $\frac{\delta}{a} \ll 1$, le premier terme devient négligeable par rapport au dernier et on a au premier ordre l'équilibre :

$$(26) \quad \frac{u_a^2}{a} f(x) e^{-2y/\delta} + \frac{u_*^2}{\delta} \frac{\partial \tau_+}{\partial y_+} = 0$$

d'où l'ordre de grandeur de la vitesse u_* (ou u_0).

$$(27) \quad \frac{u_*}{u_a} = \frac{u_o}{u_a} = \left(\frac{\delta}{a}\right)^{1/2}$$

Cette estimation conduit pour le cas asymptotique des hautes fréquences à une décroissance de la vitesse en :

$$u_o \sim R_w^{-1/4}$$

loi déjà prédite par d'autres auteurs [5], [15] et qui n'est pas en contradiction avec les mesures. (Estimation expérimentale : $u_o \sim R_w^{-0.2}$).

Dans le cas $R_w = 372$, cette estimation conduit à

$$\frac{u_o}{u_a} \sim 0.25$$

valeur proche de celle mesurée près de la paroi.

L'estimation (27) peut également se retrouver par l'analyse proposée par Moore et Hunt [16] qui considèrent la région au voisinage du coin du creuset où sont concentrées les forces électromagnétiques. Ces auteurs assimilent cette région à une source de quantité de mouvement qui engendre un jet de paroi qui s'étale ensuite dans une région où l'analyse faite plus haut est valide (cf schéma ci-après).

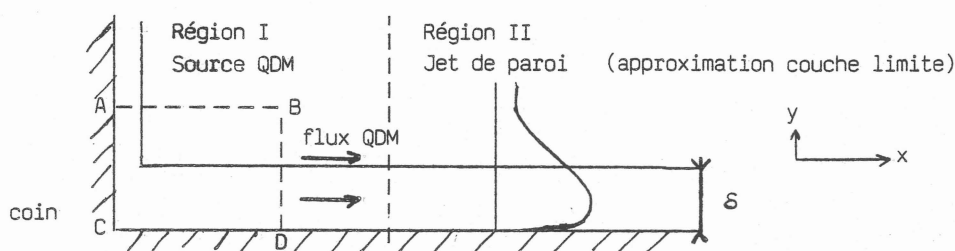


Schéma de la région pariétale.

Dans la région I, l'approximation de la couche limite ne tient plus puisque l'échelle suivant x devient du même ordre que celle suivant y , soit δ . Toujours en suivant le raisonnement de Moore et Hunt qui considèrent que l'équilibre dans cette région s'effectue entre force motrice et flux de quantité de mouvement, l'application du théorème des quantités de mouvement

au volume défini par la surface ABCD et d'épaisseur unité conduit aux estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{flux de quantité de mouvement sortant de AD} &: \sim \rho u_o^2 \delta \\ \text{force motrice dans le volume en question} &\sim F_o \delta^2 = \frac{u_o^2}{a} \delta^2 \end{aligned}$$

$$\text{d'où on déduit à nouveau} \quad \frac{u_o}{u_a} = \left(\frac{\delta}{a}\right)^{1/2}$$

L'équation (26) nous permet de déterminer les contraintes de frottement dans la peau électromagnétique. En supposant que celle-ci devient négligeable loin de la paroi, on trouve :

$$(28) \quad \tau = F_p \frac{\delta}{2} e^{-2y/\delta}$$

où F_p est la force électromagnétique à la paroi.

Si on écrit :

$$(29) \quad \tau = - \overline{u'v'} \sim u'^2$$

L'expression (28) justifie la croissance exponentielle de la vitesse turbulente u' , constatée expérimentalement au voisinage de la paroi. De plus, toujours en utilisant le modèle de Prandtl :

$$(30) \quad \frac{u'}{l} \sim \frac{\partial u}{\partial y}$$

on peut justifier d'une part, la croissance locale de la vorticité de la turbulence constatée expérimentalement (cf tableau 3) puisque

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{u_o}{\delta} \gg \frac{u_o}{a}$$

et d'autre part on rend compte de la décroissance de l'échelle des grosses structures puisque d'après (28), (29), (30) on trouve :

$$l \sim \frac{\delta}{\sqrt{2}}$$

Ces divers résultats montrent que dans la peau la création de turbulence résulte de mécanismes propres à cette région indépendamment de la région extérieure, ce qui explique l'inhomogénéité des propriétés caractéristiques de la turbulence, constatée expérimentalement.

On peut noter encore, que l'expression (28) sera utilisée dans la deuxième partie, pour définir les conditions limites pour le calcul numérique.

b) La région externe :

Cette région est caractérisée par une diffusion de vorticité nécessaire pour atteindre un état stationnaire (voir Batchelor [11]). Si on suppose que dans cette région la viscosité turbulente est à peu près constante (ce qui se justifie encore par les mesures de u' et de l qui montrent que ces valeurs sont constantes dans cette région), d'après le théorème de Batchelor, la distribution de vorticité pour un écoulement axysymétrique est telle que :

$$(31) \quad \frac{\Omega}{r} = \text{cte},$$

dans tout le vortex.

Si, comme dans le cas des basses fréquences, on suppose qu'au voisinage du coeur du vortex les lignes de courants sont verticales, l'intégration de l'équation (31) conduit au profil de vitesse dans cette région :

$$u = u_0 (1 - 2 r^2)$$

où u_0 est la vitesse de glissement à la paroi, se raccordant avec la solution dans la zone pariétale.

Ce profil a été porté (courbe pointillée) sur la figure 11 où l'on a pris pour valeur de u_0 , la vitesse de frottement u_* calculée à partir de la relation (27).

Comme dans le cas des basses fréquences, le point de vitesse nulle est situé à

$$r = (\sqrt{2}/2)a$$

Enfin, les valeurs expérimentales du tableau 3, montrent que dans cette région, la vorticité de la turbulence est de l'ordre des gradients de vitesse à l'échelle du creuset comme dans le cas des basses fréquences. Le mécanisme de production du turbulence dans cette région se distingue donc bien de celui qui existe dans la peau.

I.4.5. Conclusion

L'analyse que nous venons de proposer, et qui rend compte des principaux résultats expérimentaux obtenus, nous permet de préciser maintenant l'effet que produit l'introduction d'une échelle caractéristique dans un écoulement turbulent. Cette région singulière de l'écoulement engendre dans cette partie de l'écoulement une turbulence qui vient se superposer à celle qui règne dans tout le bain (celle-ci pouvant être engendrée par l'instabilité de l'écoulement moyen à cette échelle).

Le résultat est donc l'apparition d'une forte inhomogénéité des caractéristiques de la turbulence, bien que le profil de l'écoulement moyen ne soit pas modifié de façon sensible.

A N N E X E 1

La distribution des forces électromagnétiques.

Afin de comprendre les configurations de l'écoulement observées, il est intéressant de visualiser l'évolution de la distribution des forces de Lorentz avec la fréquence, pour une intensité fixée. Pour cela, on a effectué le calcul du champ de force de façon numérique. La procédure utilisée est classique. Elle consiste à calculer la composante unique du vecteur potentiel électromagnétique à l'aide d'un schéma aux différences finies (voir par exemple Barbier et al. [17]). Les différentes distributions calculées sont illustrées en figures 23, 24, 25, 26. A cause de l'effet de coin, il est clair que les variations de fréquence conduisent à un changement important de la distribution des forces électromagnétiques.

Regardons le comportement du champ de force dans le cas limite des basses fréquences ($R_w \ll 1$). Soient B_0 et a , les échelles respectives du champ magnétique et de longueur, la forme adimensionnelle des équations de Maxwell s'écrit :

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \\ \vec{J} = \vec{E} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = R_w \vec{J} \end{array} \right.$$

où \vec{A} , \vec{B} , \vec{J} , \vec{E} sont respectivement, le vecteur potentiel, le champ magnétique, la densité du courant et le champ électrique. Dans (32), les courants induits par le mouvement ont été négligés comparativement à ceux engendrés par la pulsation du champ magnétique. Cette hypothèse reste valable tant que

$$R_m \ll R_w$$

où R_m est le nombre de Reynolds magnétique défini par :

$$R_m = \mu \sigma u a -$$

Dans le cas où $R_w \ll 1$, les différentes variables peuvent être développées en série :

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{B}^{(0)} + R_w \vec{B}^{(1)} + \dots \\ \vec{J} &= \vec{J}^{(0)} + R_w \vec{J}^{(1)} + \dots \\ \vec{A} &= \vec{A}^{(0)} + R_w \vec{A}^{(1)} + \dots\end{aligned}$$

A l'ordre le plus bas, le système (32) se réduit à :

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B}^{(0)} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{A}^{(0)} &= \vec{B}^{(0)} \\ \vec{J}^{(0)} &= -\frac{\partial \vec{A}^{(0)}}{\partial t} \end{aligned} \right.$$

Il est clair à partir du système (33), que la phase du champ magnétique est constante dans tout l'espace et que la différence de phase entre $\vec{B}^{(0)}$ et $\vec{J}^{(0)}$ est simplement $\pi/2$.

La forme dimensionnelle de l'expression de la force \vec{F} s'écrit :

$$(34) \quad \vec{F} = R_w \frac{B_0^2}{\mu a} \vec{J} \times \vec{B}$$

A l'ordre le plus bas, la moyenne temporelle des forces de Lorentz est identiquement nulle compte tenu de (34).

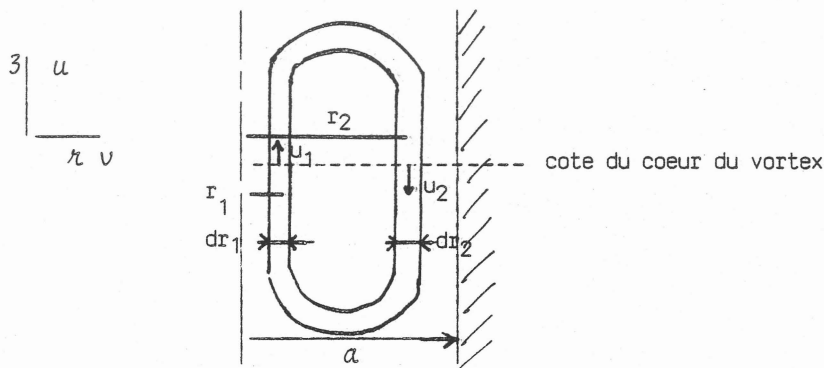
Aussi, la partie moyenne doit-elle être au moins de l'ordre de R_w^2

$$\text{d'où} \quad F_0 = 0 \quad (R_w^2)$$

A N N E X E 2

Détermination de la zone d'inversion du profil de vitesse dans le cas où $\frac{\Omega}{r}$ constant le long d'une ligne de courant.

On suppose qu'au voisinage du coeur du vortex les lignes de courants sont à peu près verticales conformément au schéma suivant :



En axysymétrie, la vorticit   s'  crit :

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r}$$

Avec l'hypoth  se des lignes de courants verticales elle s'  crit donc

$$(35) \quad \Omega = - \frac{du}{dr}$$

Soit une ligne de courant coupant le rayon passant par le coeur du vortex en r_1 lorsque la vitesse est ascendante et vaut u_1 et en r_2 lorsque la vitesse est descendante et vaut u_2 (cf sch  ma).

Soit dr un   cartement infinit  simal entre deux lignes de courant successives, la conservation du d  bit entra  ne dans le cas de figure pr  sent   ici :

$$(36) \quad r_1 u_1 dr_1 = r_2 u_2 dr_2$$

Si la distribution de vorticit   est telle que $\frac{\Omega}{r}$ est constant le long d'une ligne de courant, compte tenu de (35), on peut   crire :

$$(37) \quad \frac{1}{r_1} \left(\frac{du}{dr} \right)_{r=r_1} = \frac{1}{r_2} \left(\frac{du}{dr} \right)_{r=r_2}$$

qui peut encore s'écrire :

$$(38) \quad \frac{1}{r_1} \frac{du_1}{dr_1} = \frac{1}{r_2} \frac{du_2}{dr_2}$$

L'intégration du système formé par les équations (36), (38) conduit à :

$$u_1^2 + u_2^2 = C_1$$

où C_1 est une constante d'intégration.

Lorsque $r_1 = r_2$ on a $u_1 = u_2 = 0$ ce qui entraîne $C_1 \equiv 0$

$$\text{d'où} \quad u_1 = -u_2$$

$$\text{et} \quad r_1^2 + r_2^2 = C_2$$

Cette deuxième constante d'intégration est obtenue en écrivant que pour $r_1 = 0$ on a $r_2 = a$ d'où

$$r_1^2 + r_2^2 = a^2$$

La vitesse s'annule donc pour $r_1 = r_2$ ce qui conduit à

$$(39) \quad r_1 = r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] KOANDA S., 1982 : "Etude expérimentale du brassage électromagnétique dans un four à induction à creuset".
Thèse de 3ème cycle, 27 septembre 1982, présentée à l'U.S.M.G. et l'I.N.P.G.
- [2] TRAKAS C. : "Etude expérimentale du brassage électromagnétique dans le four à creuset".
Thèse de Docteur-Ingénieur, 7 octobre 1982, présentée au C.N.A.M.
- [3] MOORE D.J. and HUNT J.C.R., 1981 : "Electromagnetic stirring in the coreless induction furnace".
Proc. 3rd Beer-Sheva symposium on MHD-Flows and turbulence, Ed. A. Branover and A. Yakhot,
Israel University Press.
- [4] HILL J.C. and SLEICHER C.A., 1971 : "Directional sensitivity of hot film sensors in liquid metals".
Rev. Scient. Instr. Vol. 42, N° 10, 1461-1468.
- [5] KOANDA S. and FAUTRELLE Y., 1982 : "Modelling of coreless induction furnace : some theoretical and experiment results".
Proc. of the IUTAM Symposium on metallurgical application of MHD, Cambridge (U.K.)
- [6] TENNEKES H. and LUMLEY J.L., 1972 : "A first course in turbulence".
The MIT Press, Cambridge, (Mass.), London.
- [7] TRAKAS C., TABELING P. and CHABRERIE J.P., 1984 : "Etude expérimentale du brassage turbulent dans le four à induction".
A paraître dans J. Méc. Théor. Appl.
- [8] CHAMPAGNE F.H., 1978 : "The fine scale structure of the turbulent velocity field".
J. Fluid Mech., Vol. 86, 67-108.
- [9] LUMLEY J.L., 1965 : "Interpretation of time spectra measured in high-intensity shear flows".
The Physics of Fluids, Vol. 8 n° 6, 1056-1062.
- [10] HINZE J.O., 1975 : "Turbulence".
2nd Edition, Mac Graw Hill Book Company, New-York, London.

- [11] BATCHELOR G.K., 1956 : "On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number".
J. Fluid. Mech., 1, 177.

- [12] SNEYD A., 1971 : "Generation of fluid motion in a circular cylinder by an unsteady applied magnetic field".
J. Fluid. Mech., 49, 817.

- [13] TARAPORE E.D. and EVANS J.W., 1976 : "Fluid velocities in induction melting furnace : Part I. : Theory and laboratory experiments".
Trans. Met..Soc. AIME, 7B, 343.

- [14] FAUTRELLE Y., 1981 : "Analytical and numerical aspects of the electromagnetic stirring induced by alternating magnetic field".
J. Fluid Mech., Vol. 102, 405-430.

- [15] LILLICRAP D.C. and MOORE D.J., 1982 : "Electromagnetic stirring in coreless induction furnace".
Proc. of Electroheat for metal Conference, Cambridge, England.

- [16] MOORE D.J. and HUNT J.C.R., 1982 : "Turbulence and unsteadiness in the coreless induction furnace".
Proc. of the IUTAM Symposium on metallurgical application of MHD, Cambridge (U.K.)

- [17] BARBIER J.N., FAUTRELLE Y.R., EVANS J.W. and CREMER P., 1982 : "Simulation numérique des fours chauffés par induction".
J. Mec. Theor. Appl., 1, 583.

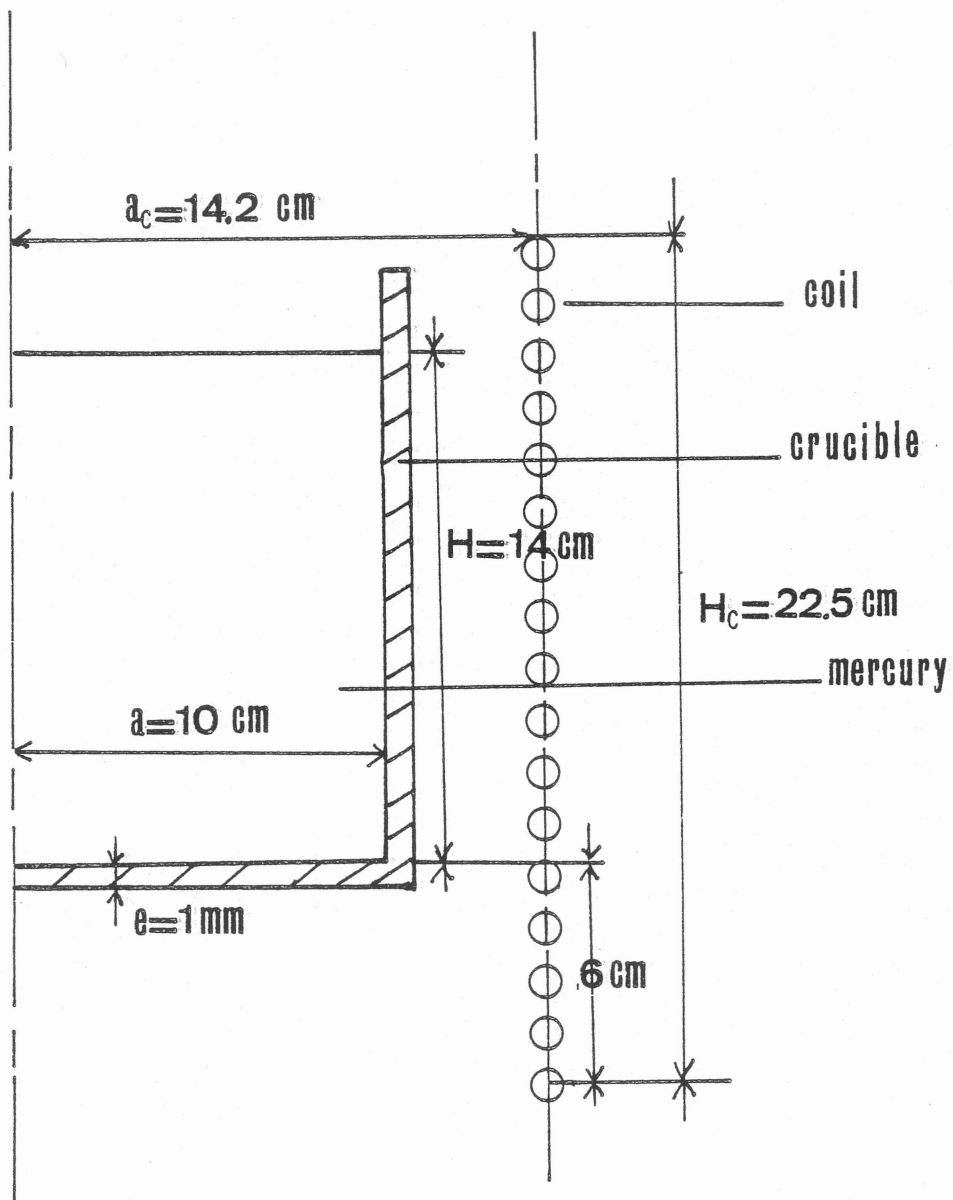


FIG. 1 : SCHEMA DE L'INSTALLATION

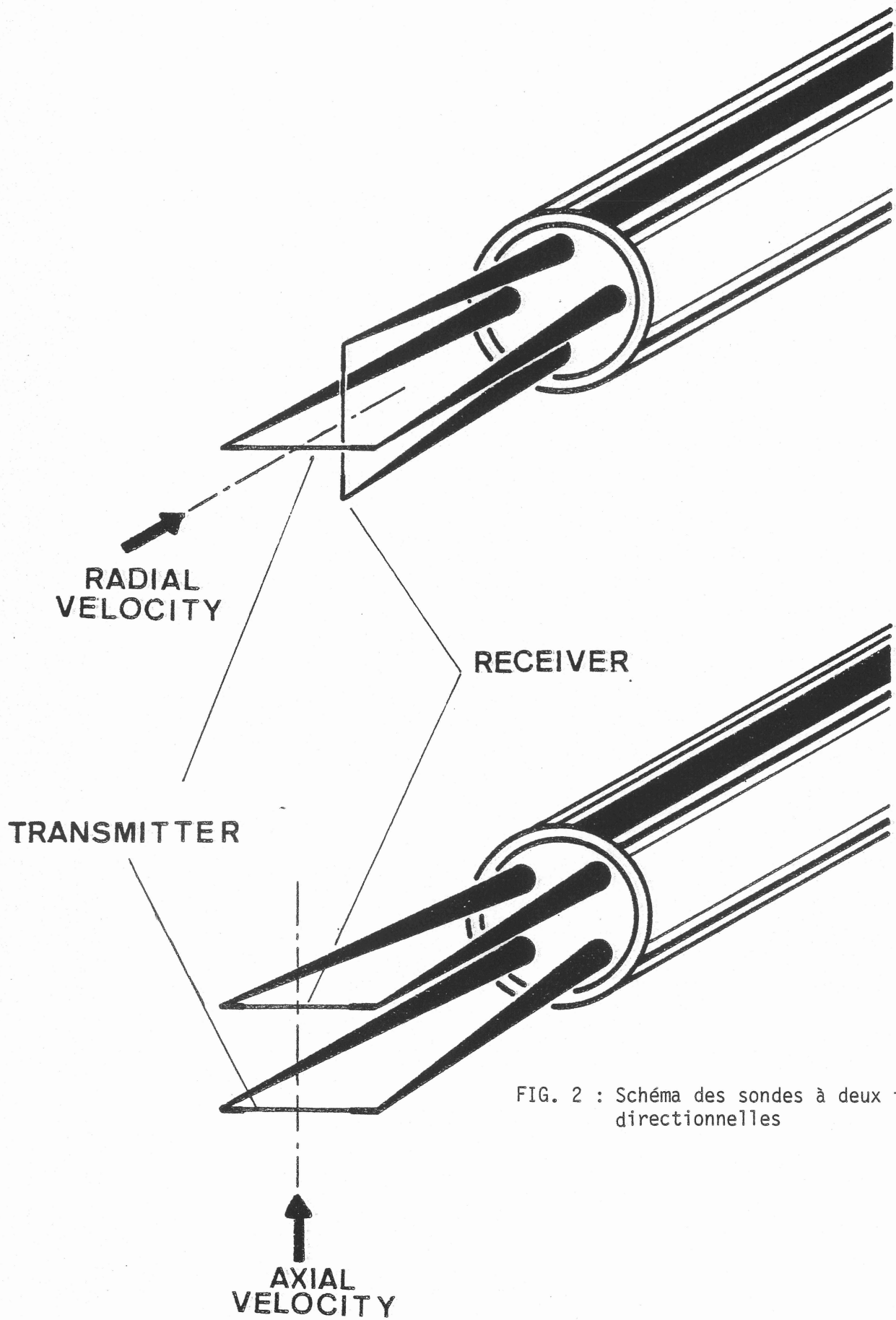


FIG. 2 : Schéma des sondes à deux films directionnelles

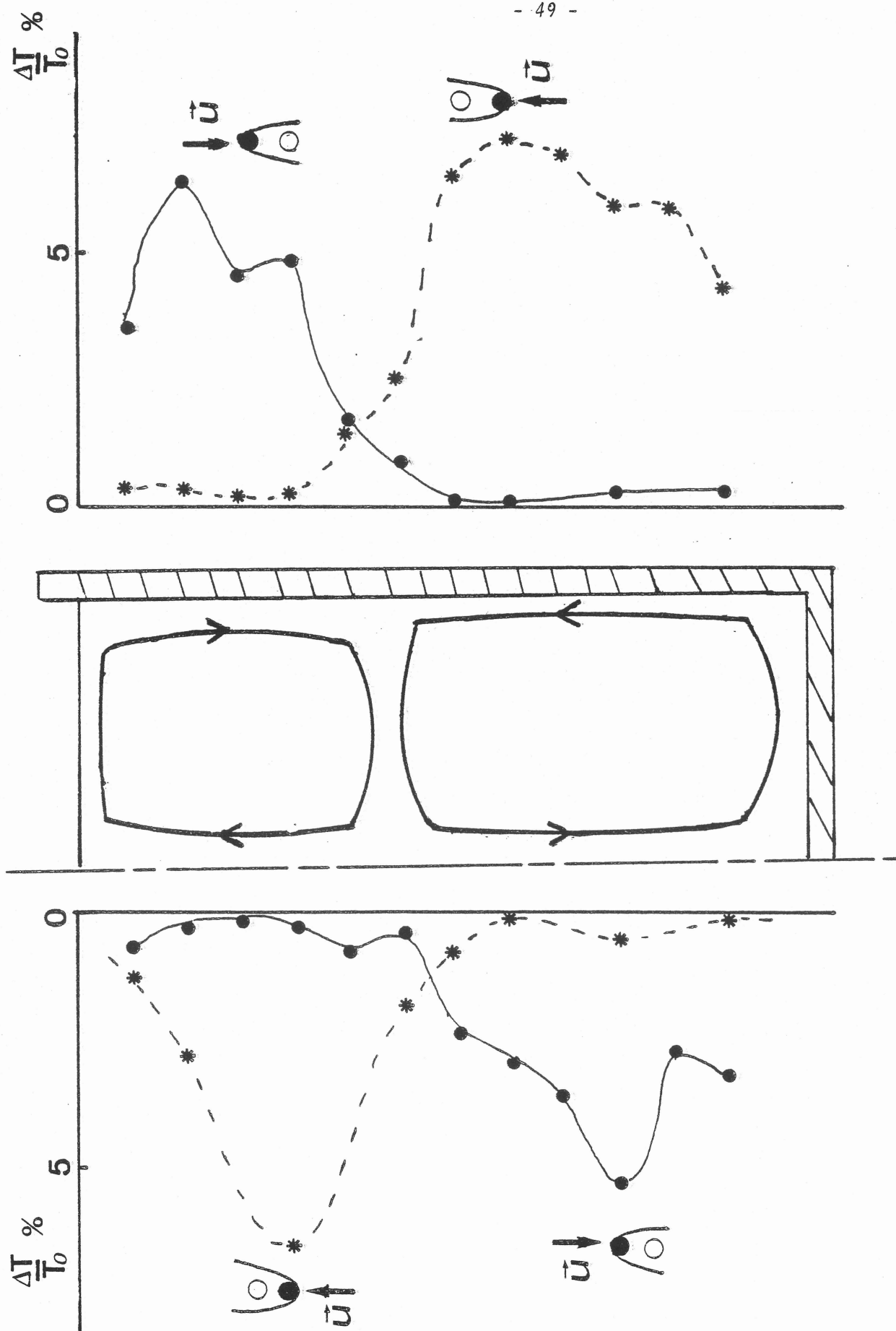


FIG. 3 : Exemple de mesure de la configuration

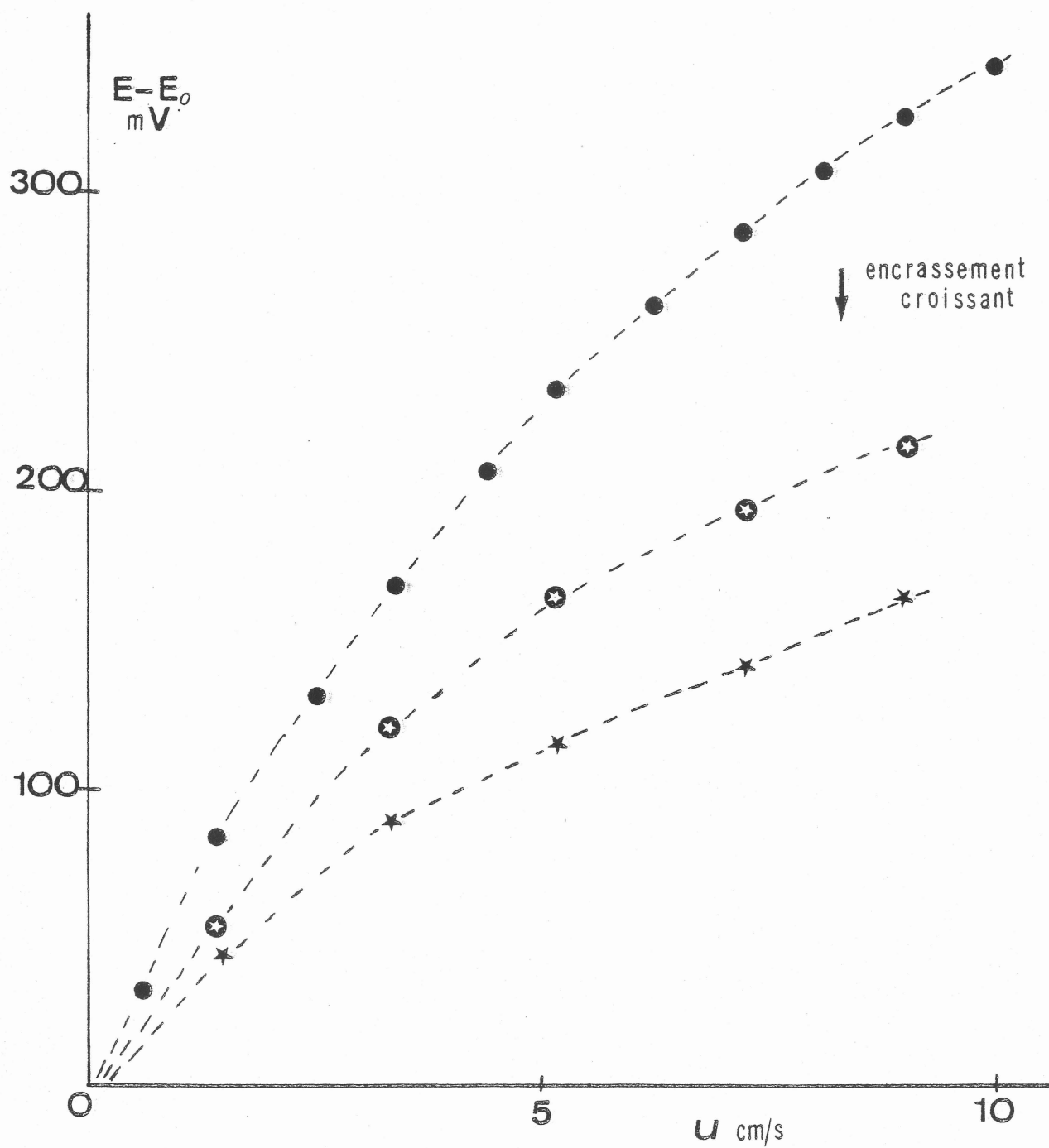


FIG. 4a : Courbe d'étalonnage de la sonde à film chaud (tension - vitesse)

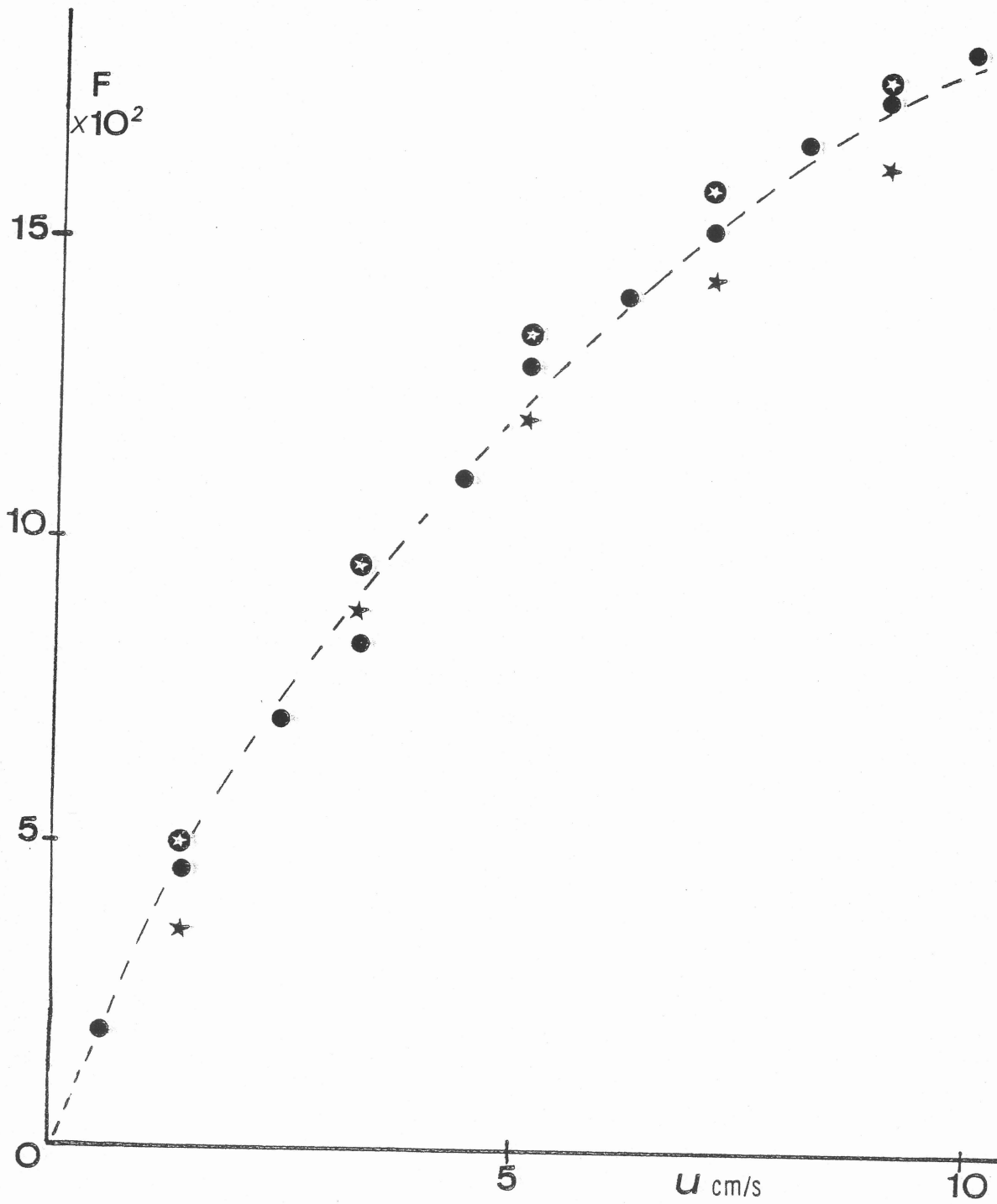
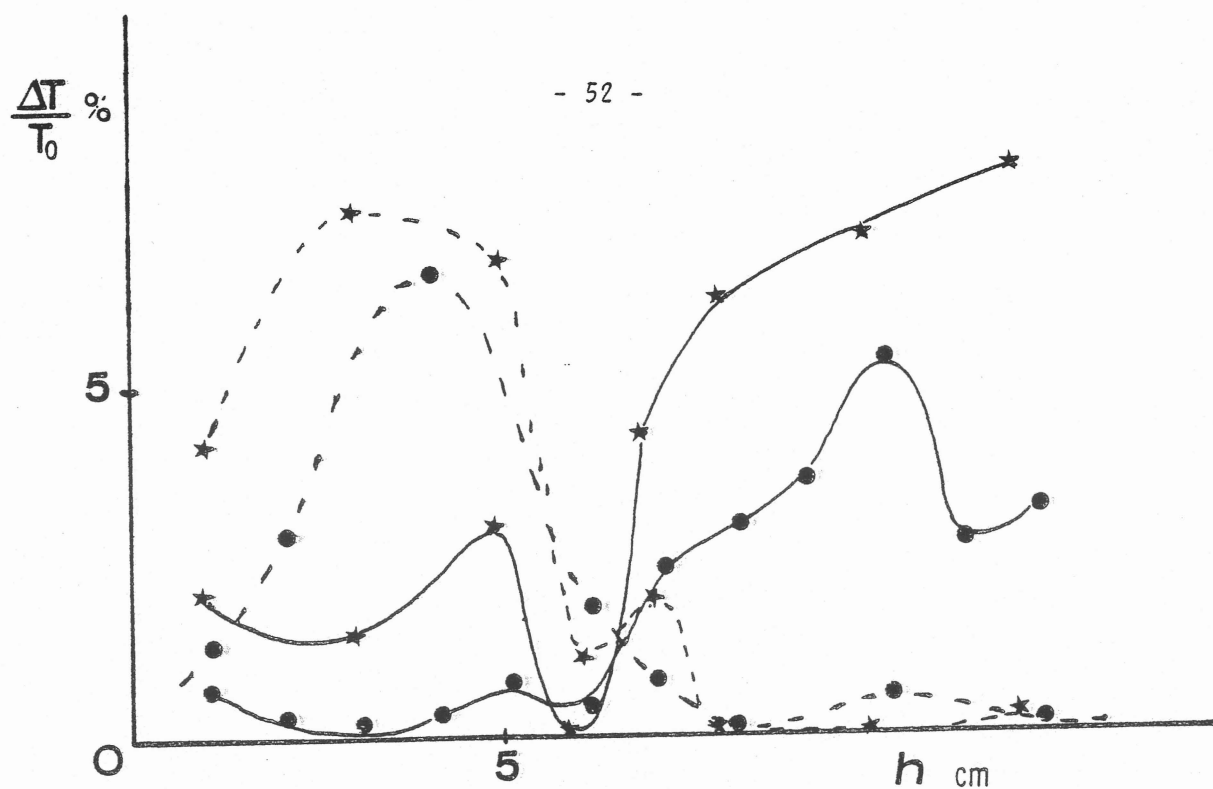
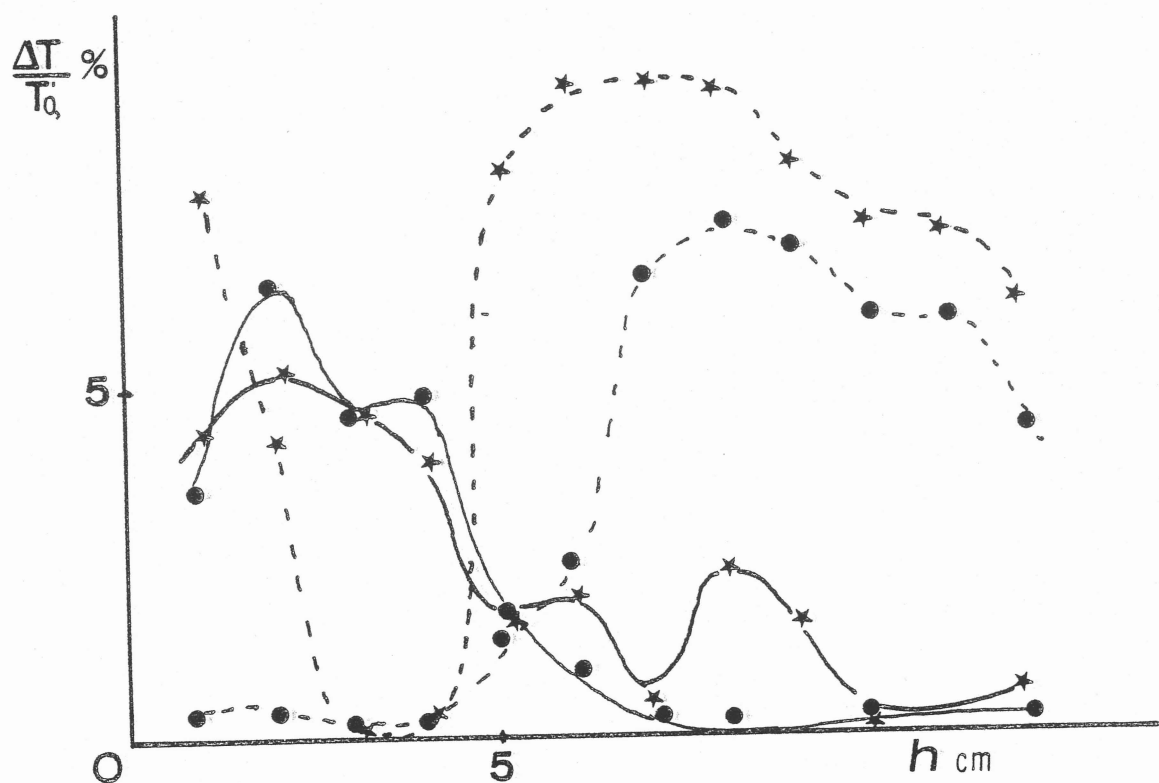


FIG. 4b : Courbe d'étalonnage de la sonde à film chaud (forme universelle)



-a-



-b-

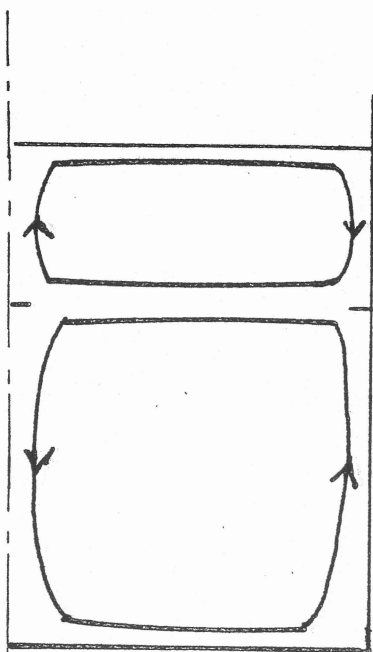
FIG. 5 : Exploration avec la sonde directionnelle pour deux intensités

★ $I = 480$ A

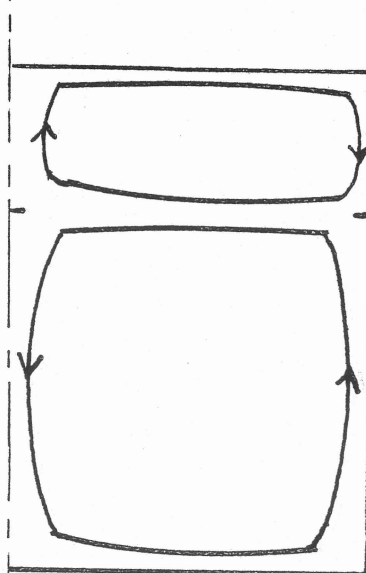
● $I = 200$ A

5a : Exploration le long de l'axe $r/a = 0$

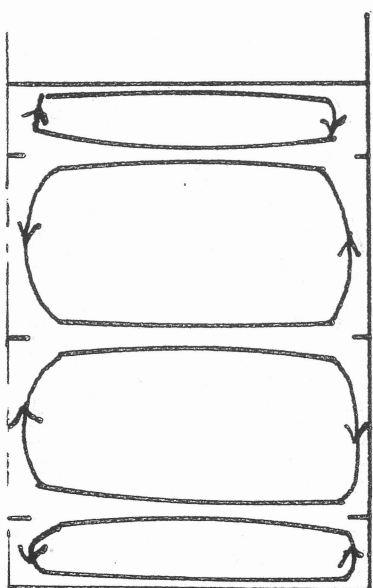
5b : Exploration le long de la paroi verticale $r/a = 0.9$



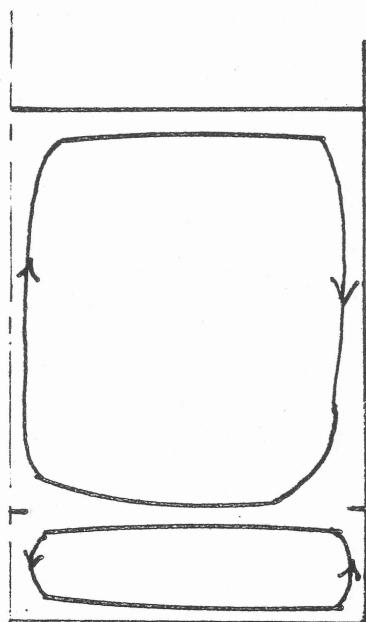
$R\omega = 3.9$



$R\omega = 30.$



$R\omega = 166.$



$R\omega = 372.$

FIG. 6 : Configurations mesurées à différentes fréquences

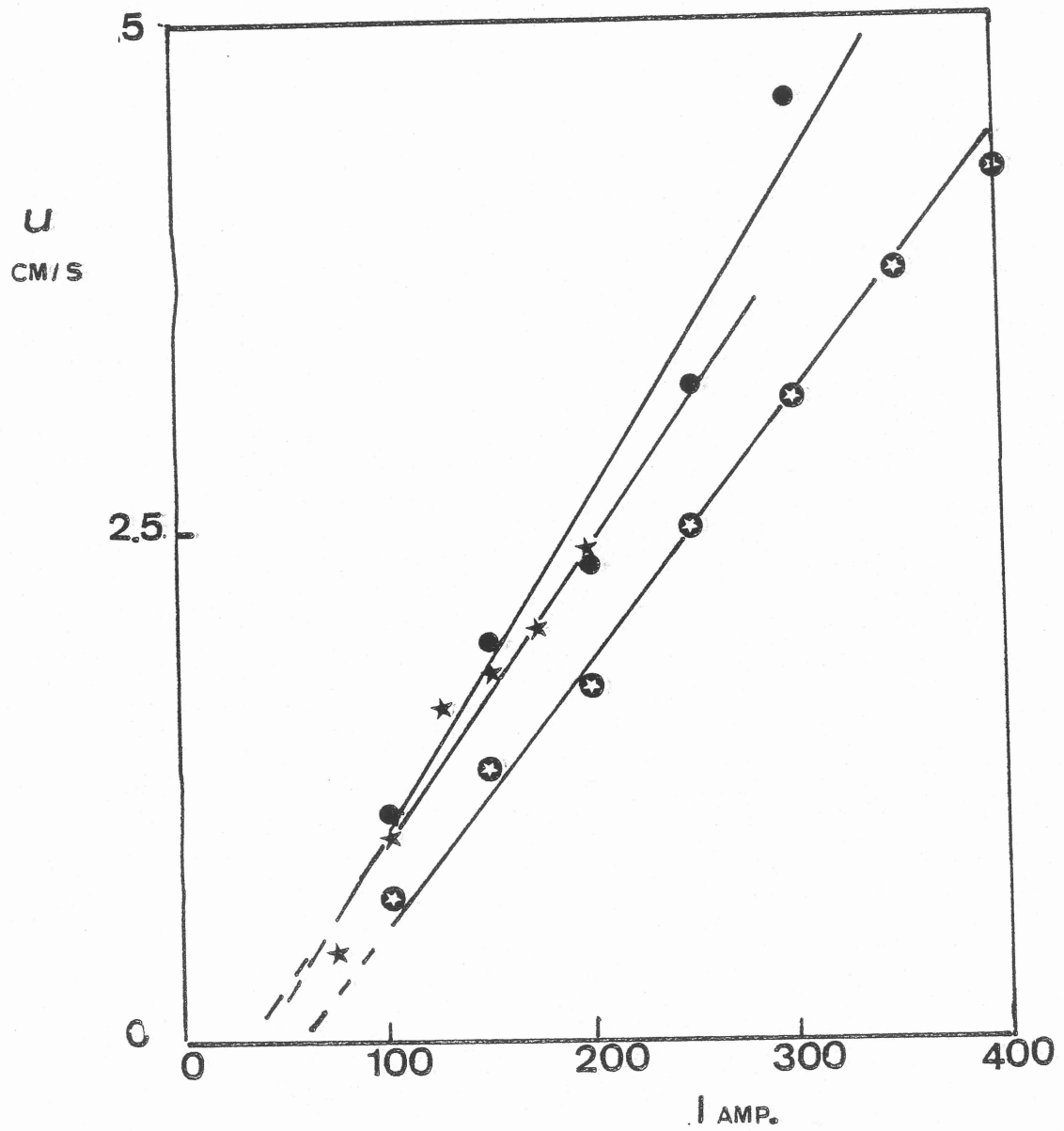


FIG. 7 : Evolution de la vitesse moyenne caractéristique axiale en fonction de l'intensité du courant (valeur efficace) pour différentes fréquences.

- ⊗ $R_\omega = 3.9$
- $R_\omega = 30$
- ★ $R_\omega = 372$

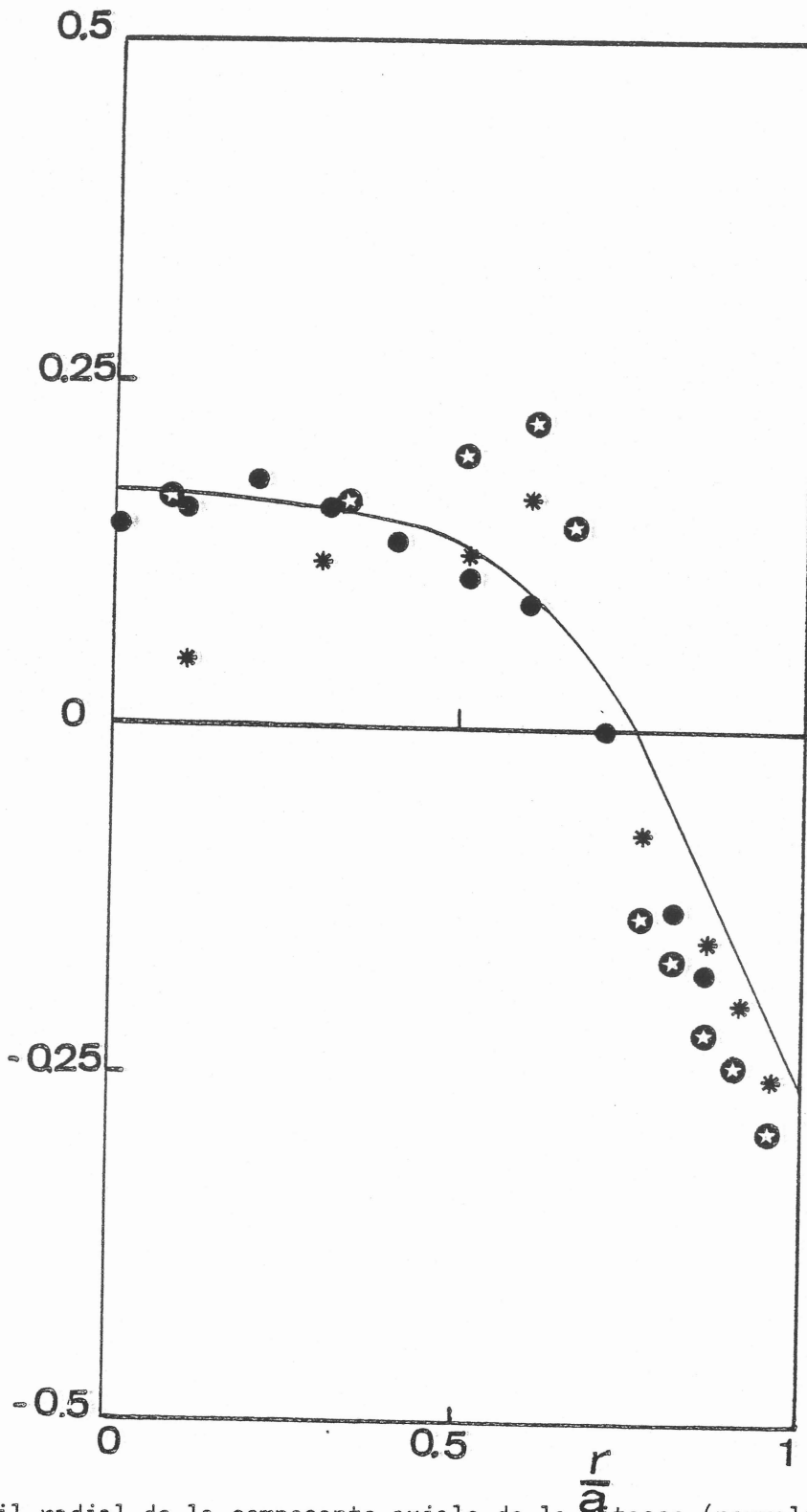


FIG. 8 : Profil radial de la composante axiale de la vitesse (normalisée par la vitesse d'Alfvén u_a) à travers le cœur du vortex. (z est mesuré depuis le fond du creuset).
La courbe en trait plein vérifie la conservation du débit. $R_\omega = 3.9$

★ $z/H = 0.43$

● $z/H = 0.3$

* $z/H = 0.78$

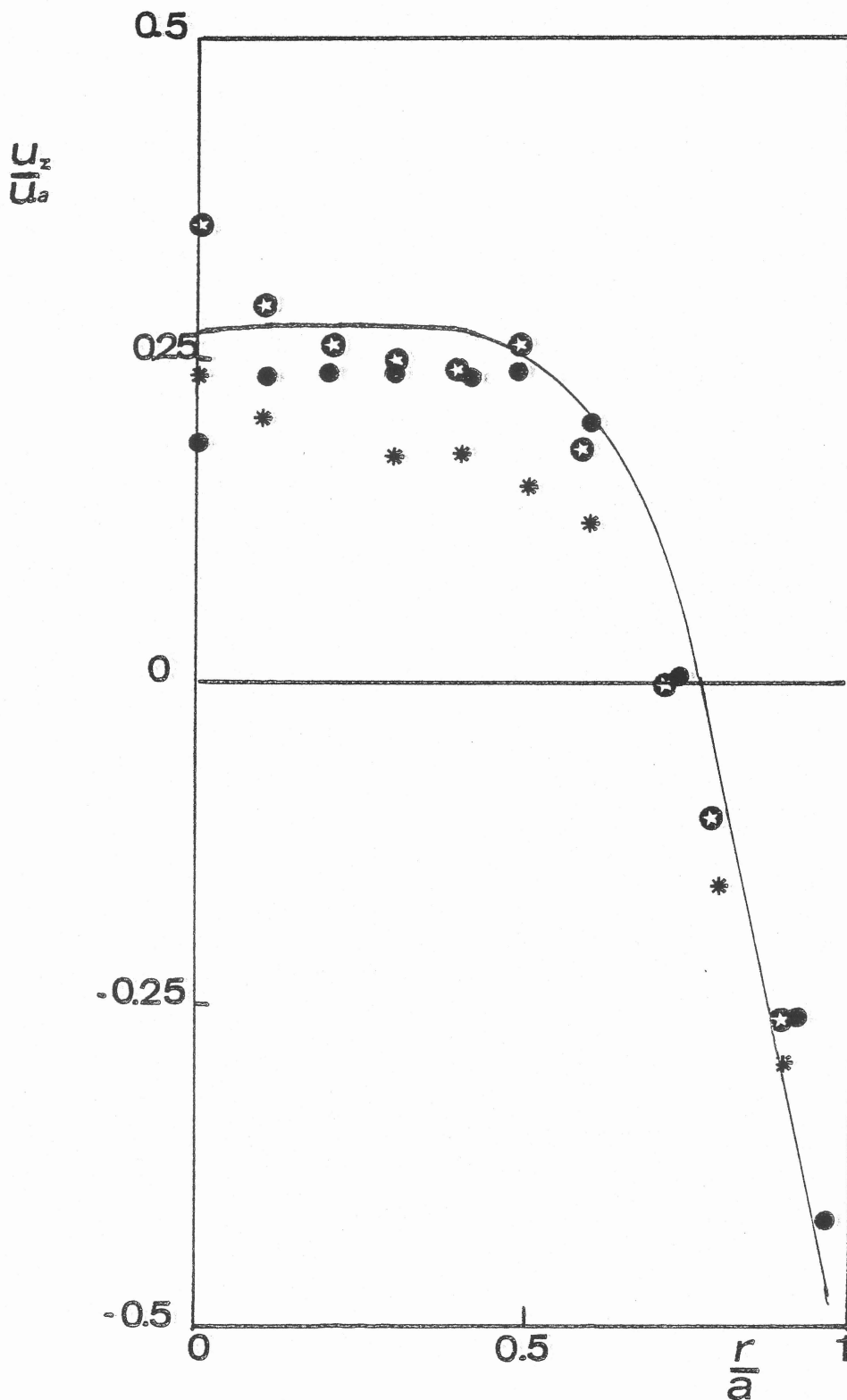


FIG. 9 : Profil radial de la composante axiale de la vitesse (normalisée par la vitesse d'Alfvén u_a) à travers le coeur du vortex. (z est mesuré depuis le fond du creuset).

La courbe en trait plein vérifie la conservation du débit. $R_\omega = 30$

● $z/H = 0.78$

⊛ $z/H = 0.5$

* $z/H = 0.43$

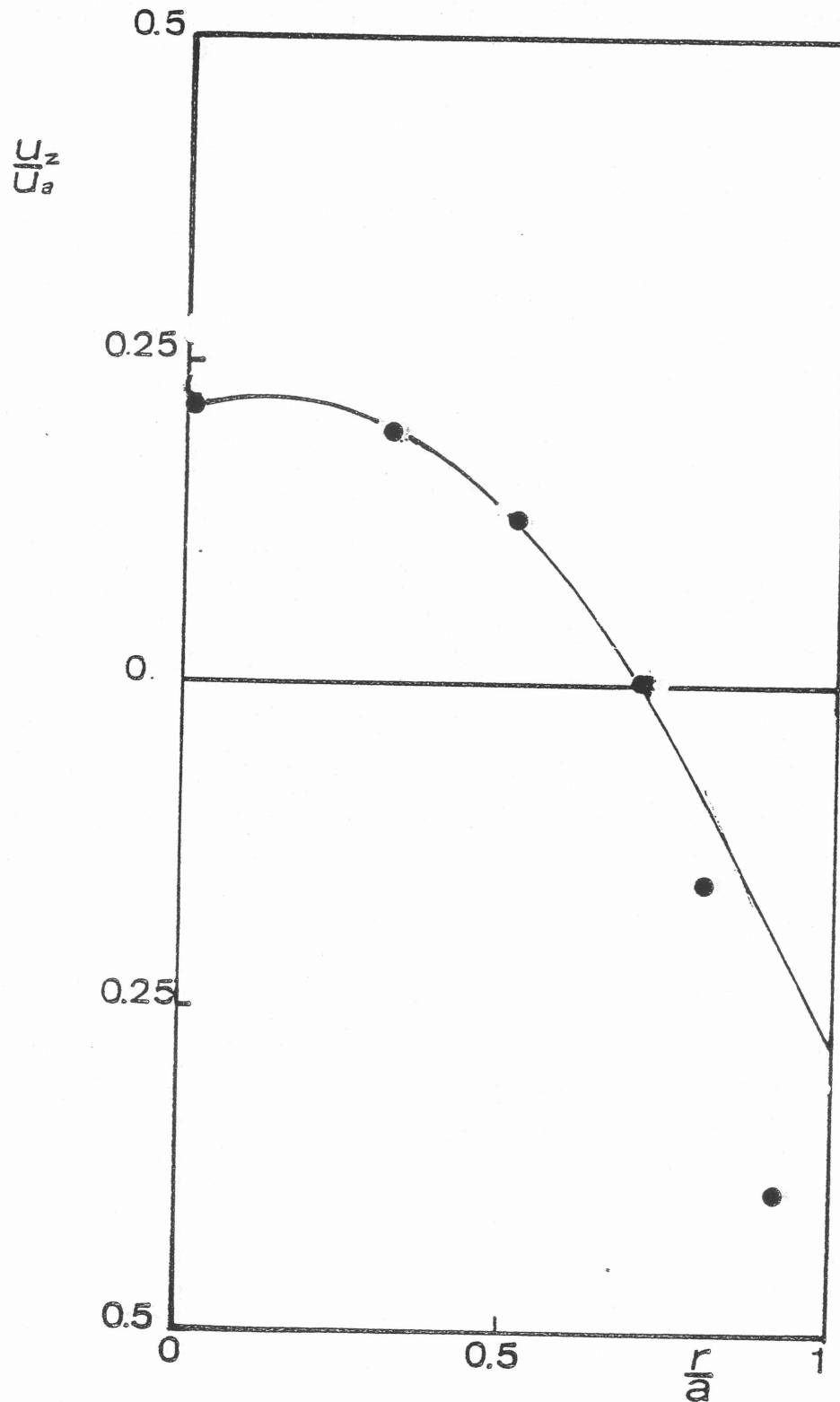


FIG. 10 : Profil radial de la composante axiale de la vitesse (normalisée par la vitesse d'Alfvén u_a) à travers le coeur du vortex. (z est mesuré depuis le fond du creuset).
La courbe en trait plein vérifie la conservation du débit. $R_\omega = 166$

● $z/H = 0.7$

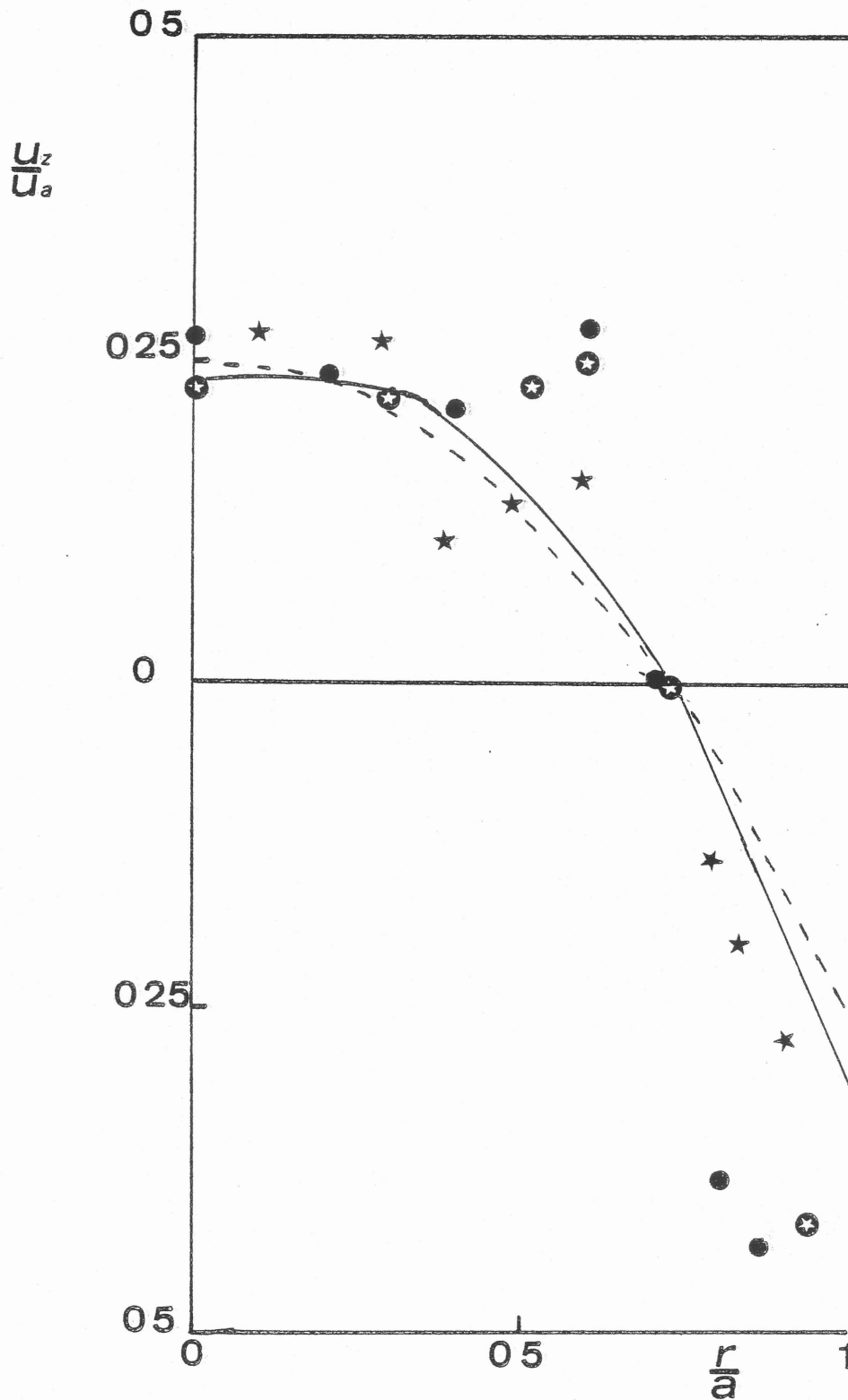


FIG. 11 : Profil radial de la composante axiale de la vitesse (normalisée par la vitesse d'Alfvén u_a) à travers le coeur du vortex. (z est mesuré depuis le fond du creuset).

La courbe en trait plein vérifie la conservation du débit. $R_\omega = 372$

● $z/H = 0.08$

⊛ $z/H = 0.5$

★ $z/H = 0.15$

----- Profil parabolique

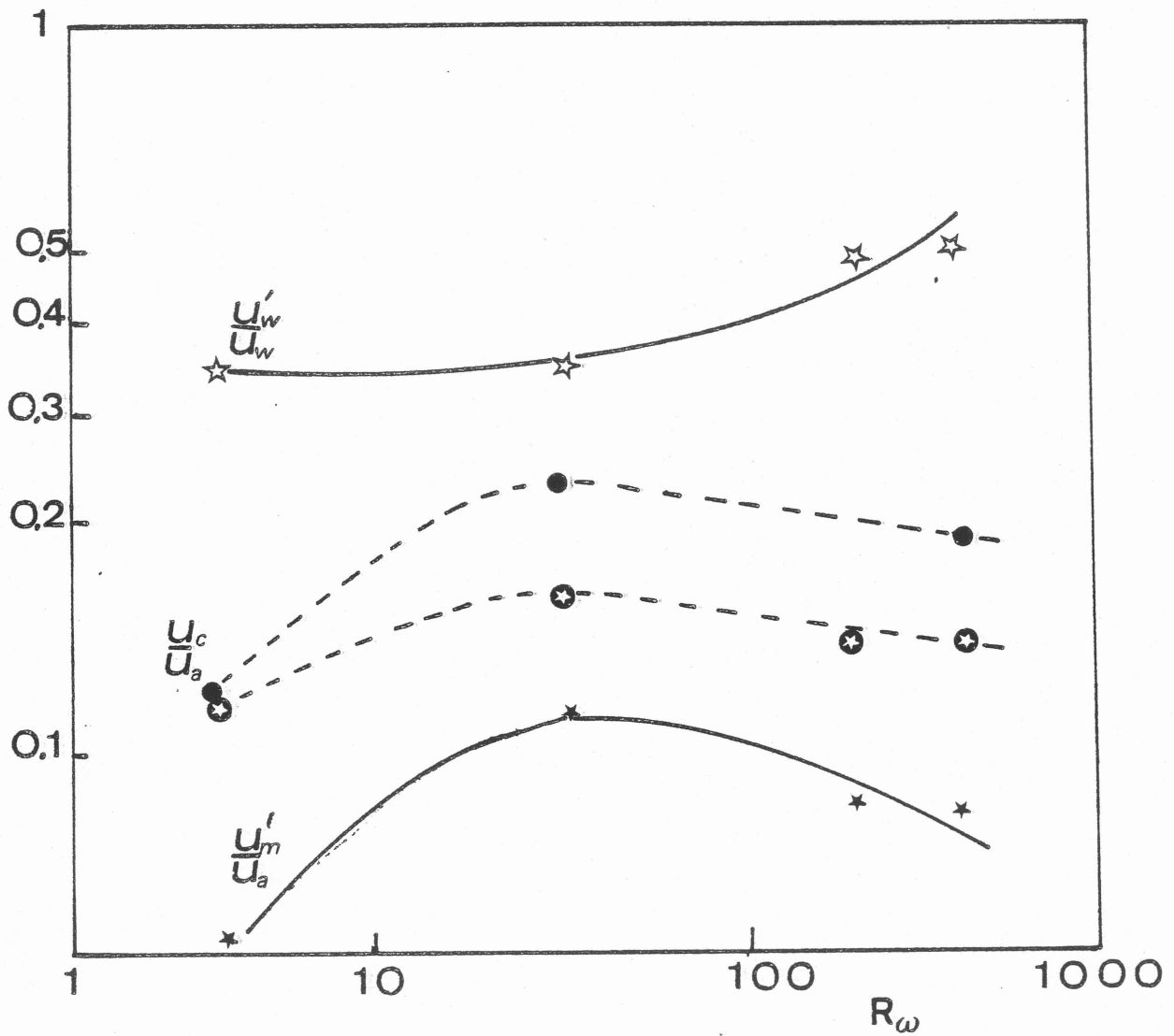


FIG. 12 : Evolution des vitesses moyennes et turbulentes avec la fréquence (les vitesses sont normalisées par la vitesse d'Alfvén u_a)

- Vitesse débitante dans le tourbillon inférieur
- ★ Vitesse dévitante dans le tourbillon supérieur
- ★ Vitesse turbulente axiale moyennée le long d'un rayon passant par le coeur du vortex
- ★ Intensité turbulente près de la paroi

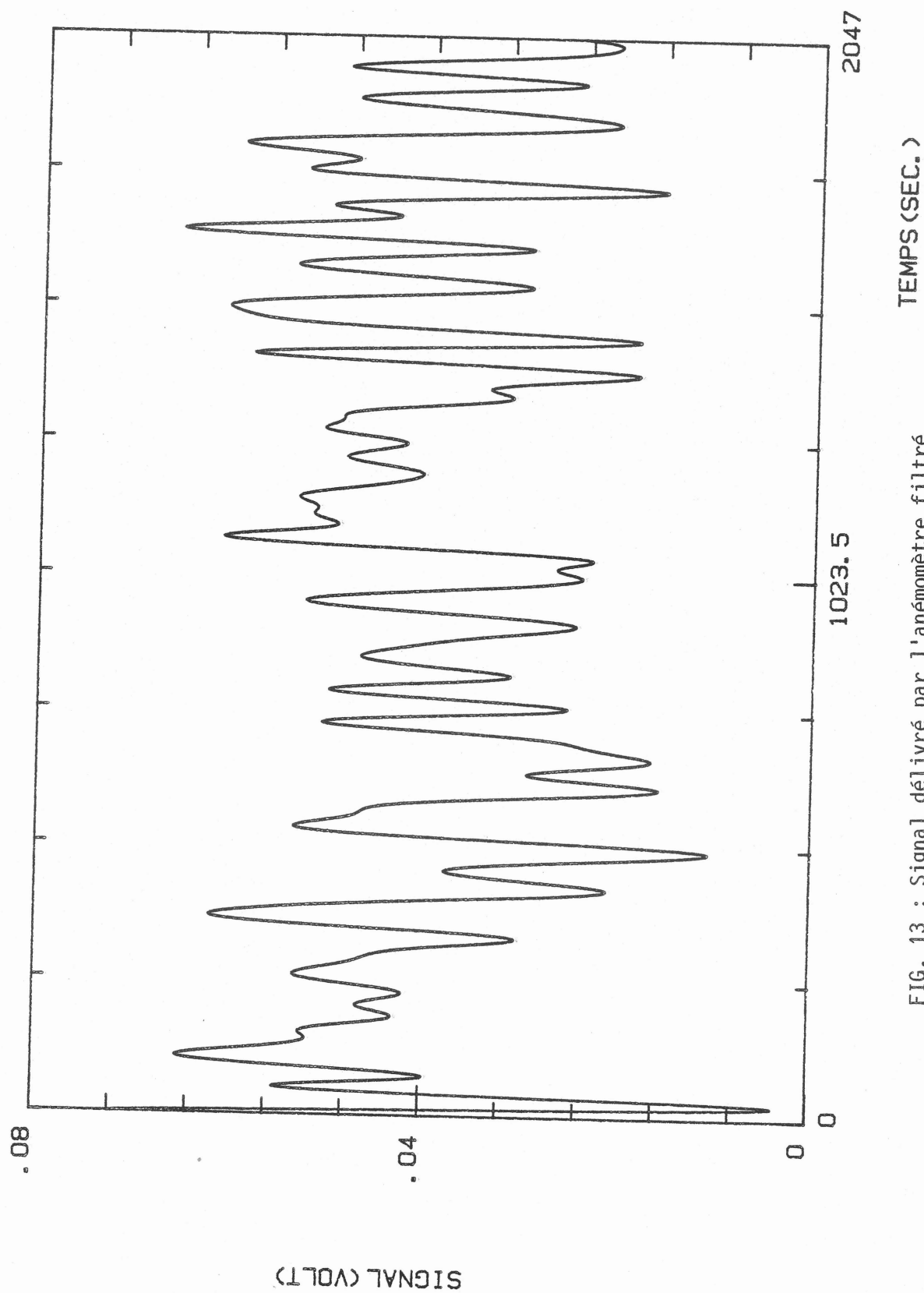


FIG. 13 : Signal délivré par l'anémomètre filtré
en passe-bas (0,1 Hz)

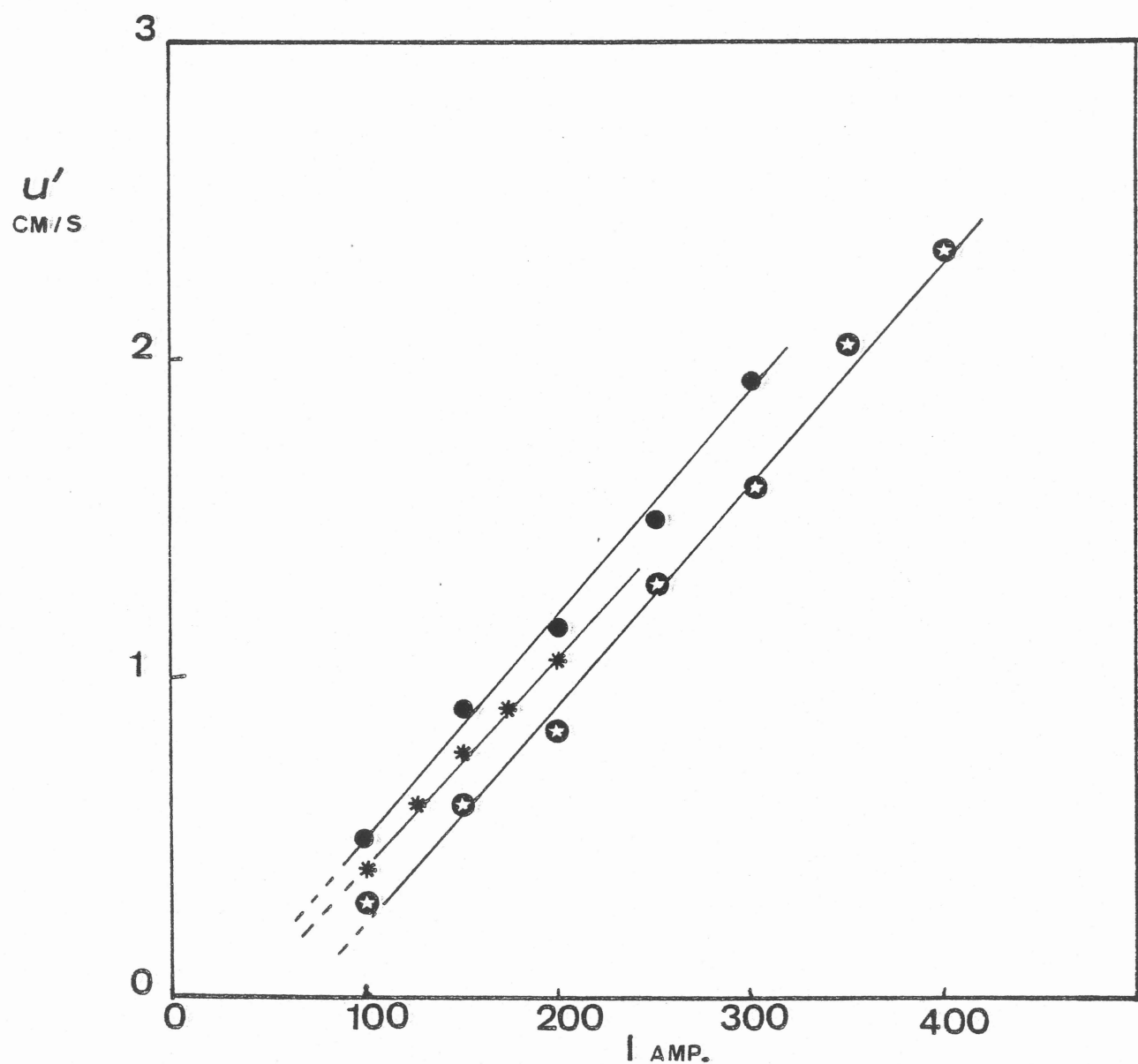


FIG. 14 : Evolution de la vitesse turbulente axiale moyennée le long de l'axe du creuset en fonction de l'intensité du courant inducteur pour différentes fréquences (la vitesse est normalisée par la vitesse d'Alfvén u_a)

- ★ $R_\omega = 3.9$
- $R_\omega = 30$
- * $R_\omega = 372$

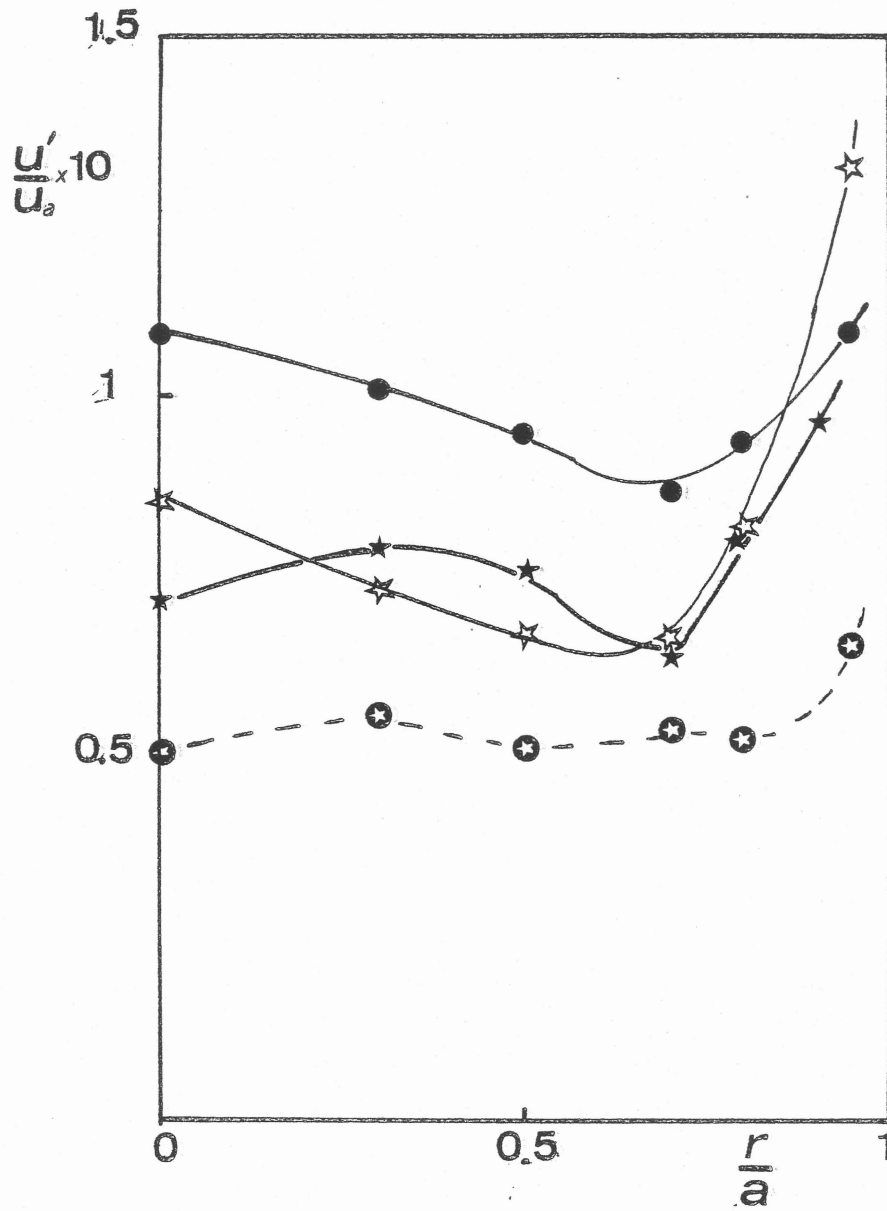
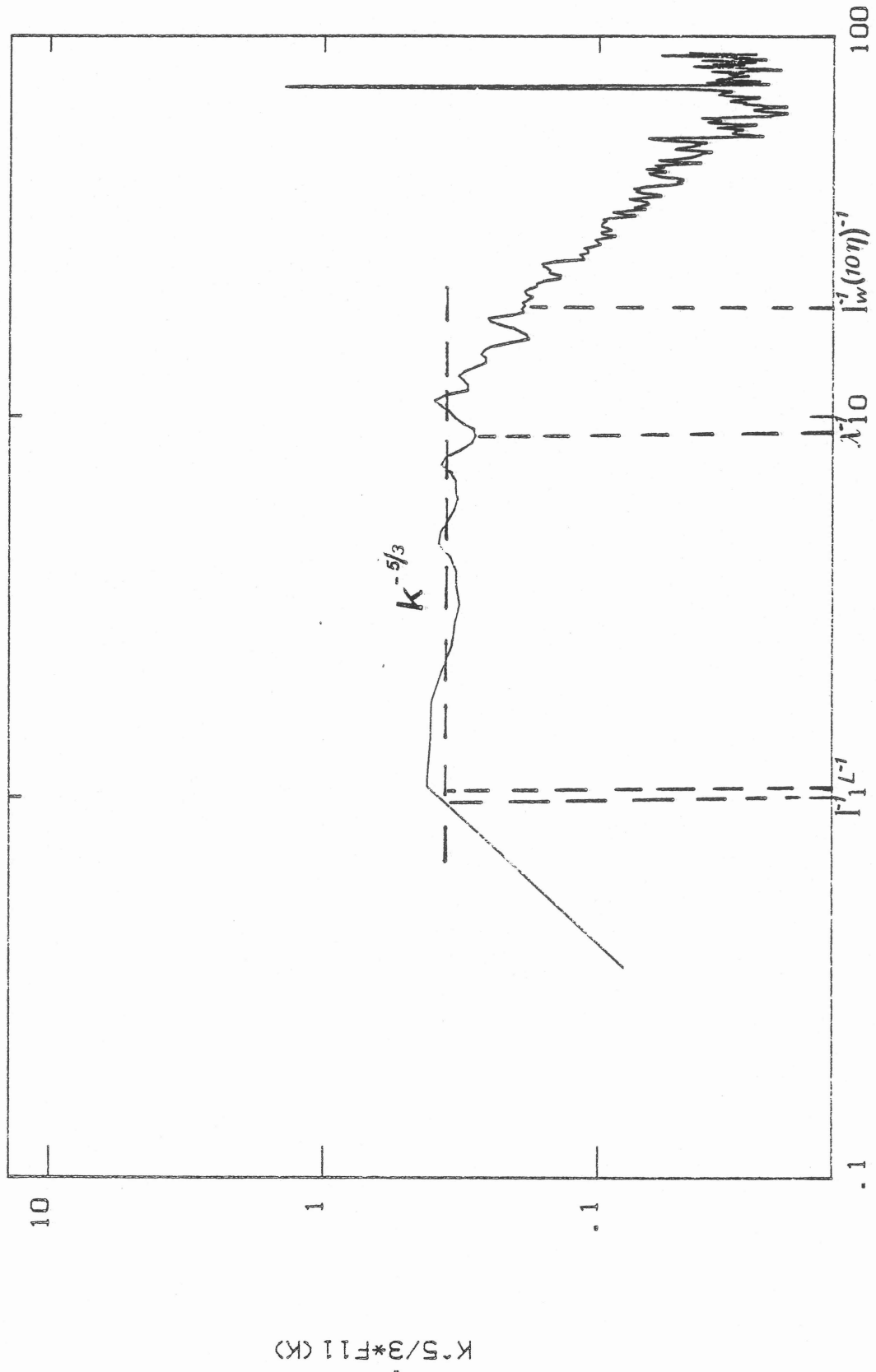


FIG. 15 : Profils radiaux de la vitesse turbulente axiale à travers le coeur du vortex pour différentes fréquences (la vitesse est normalisée pour la vitesse d'Alfvén u_a)

- \odot $R_\omega = 3.9$, $z/H = 0.78$
- \bullet $R_\omega = 30$, $z/H = 0.78$
- \star $R_\omega = 166$, $z/H = 0.7$
- \star $R_\omega = 372$, $z/H = 0.5$



$K \text{ (CM}^{-1}\text{)}$

FIG. 16 : Spectre monodimensionnel compensé (multiplié par $k^{5/3}$)

$$R_{\omega} = 3.9$$

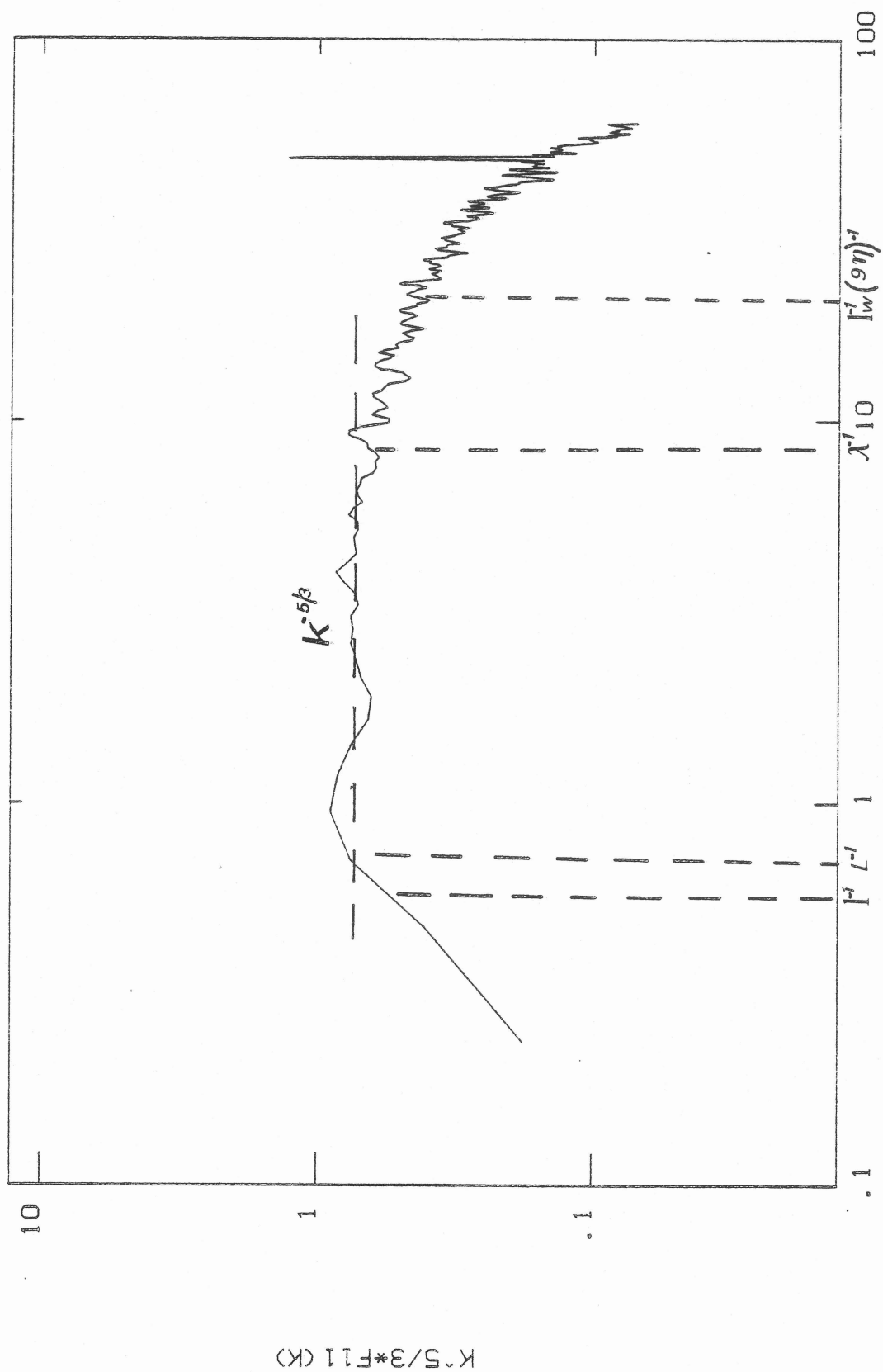


FIG. 17 : Spectre monodimensionnel compensé (multiplié par $k^{5/3}$)
 $R_{\omega} = 30$
 $K \text{ (CM}^{-1}\text{)}$

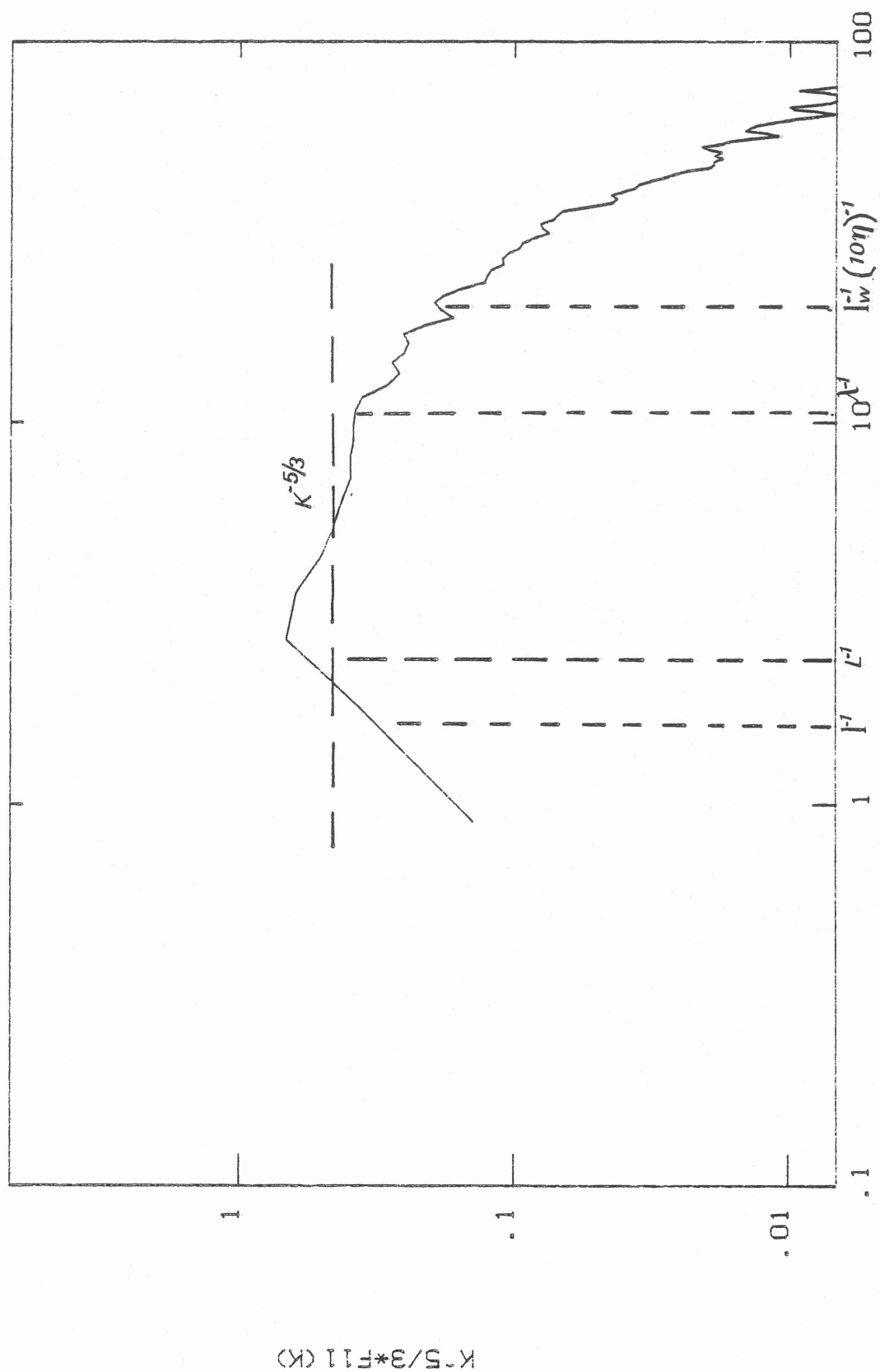
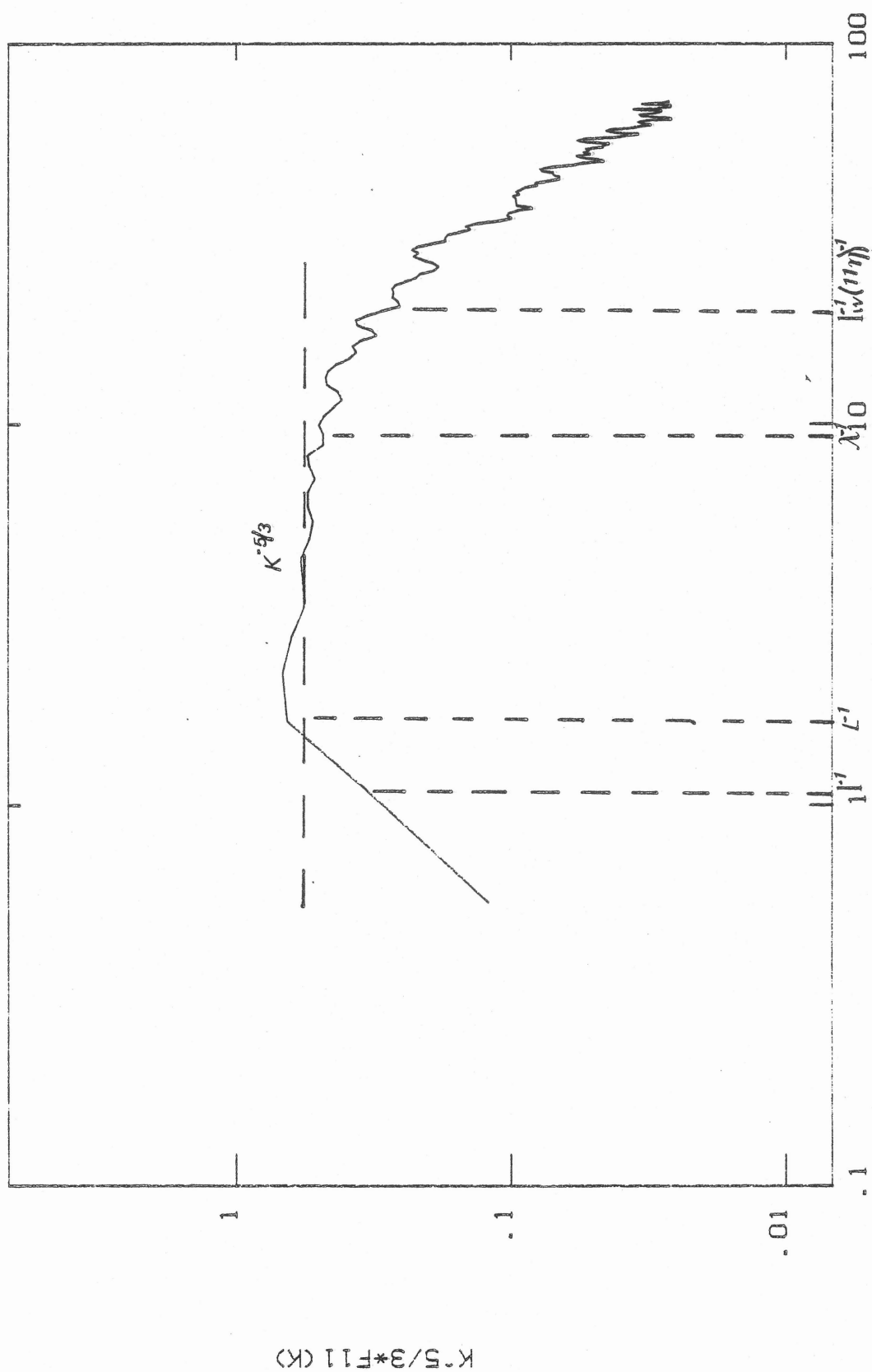


FIG. 18 : Spectre monodimensionnel compensé (multiplié par $K^{5/3}$)

$R_\omega = 166$



$K \text{ (CM}^{-1}\text{)}$

FIG. 19 : Spectre monodimensionnel compensé (multiplié par $k^{5/3}$)

$R_{\omega} = 372$

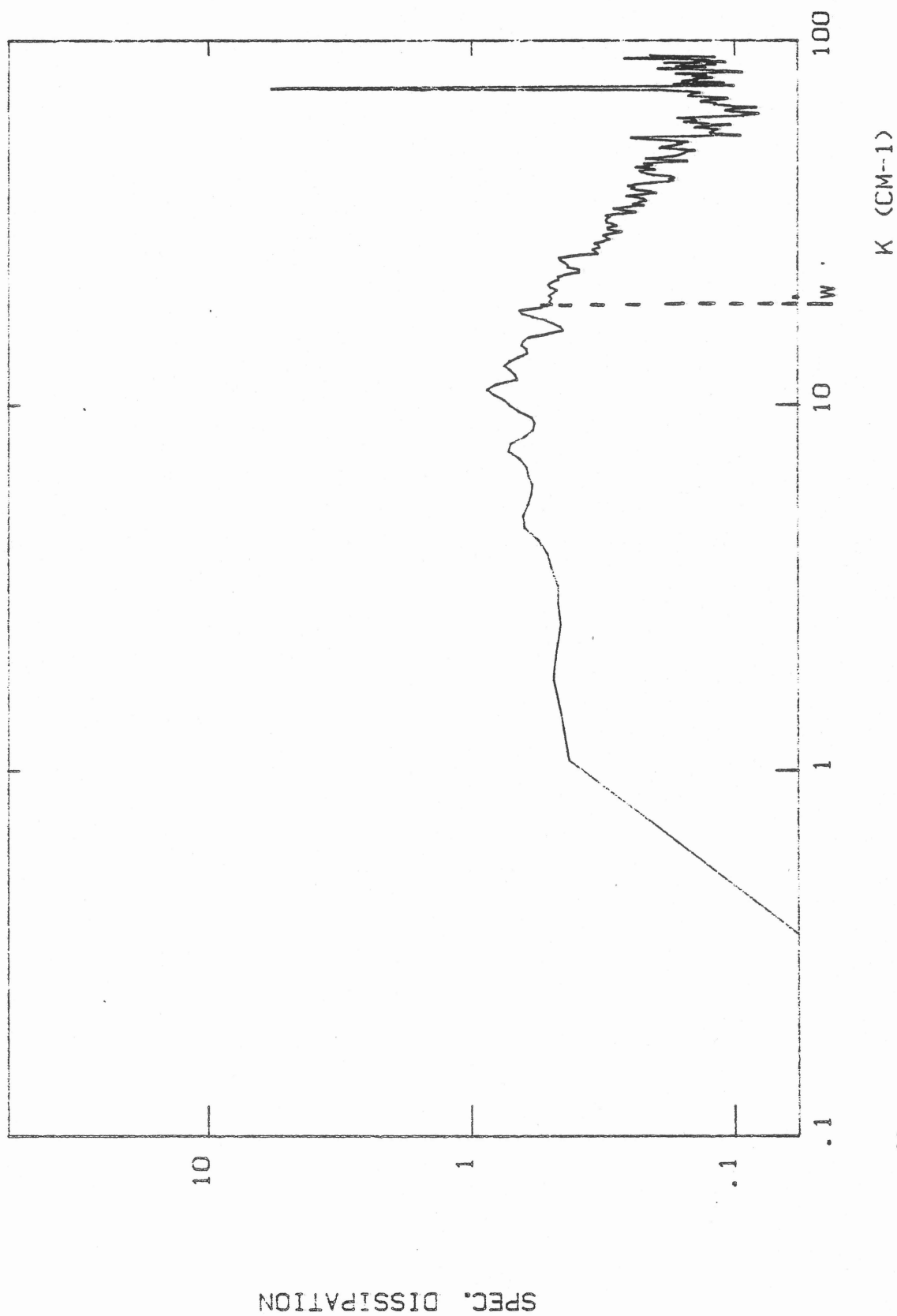


FIG. 20 : Spectre de dissipation mesuré près de la paroi

$R_w = 3.9$ $I = 300$ A

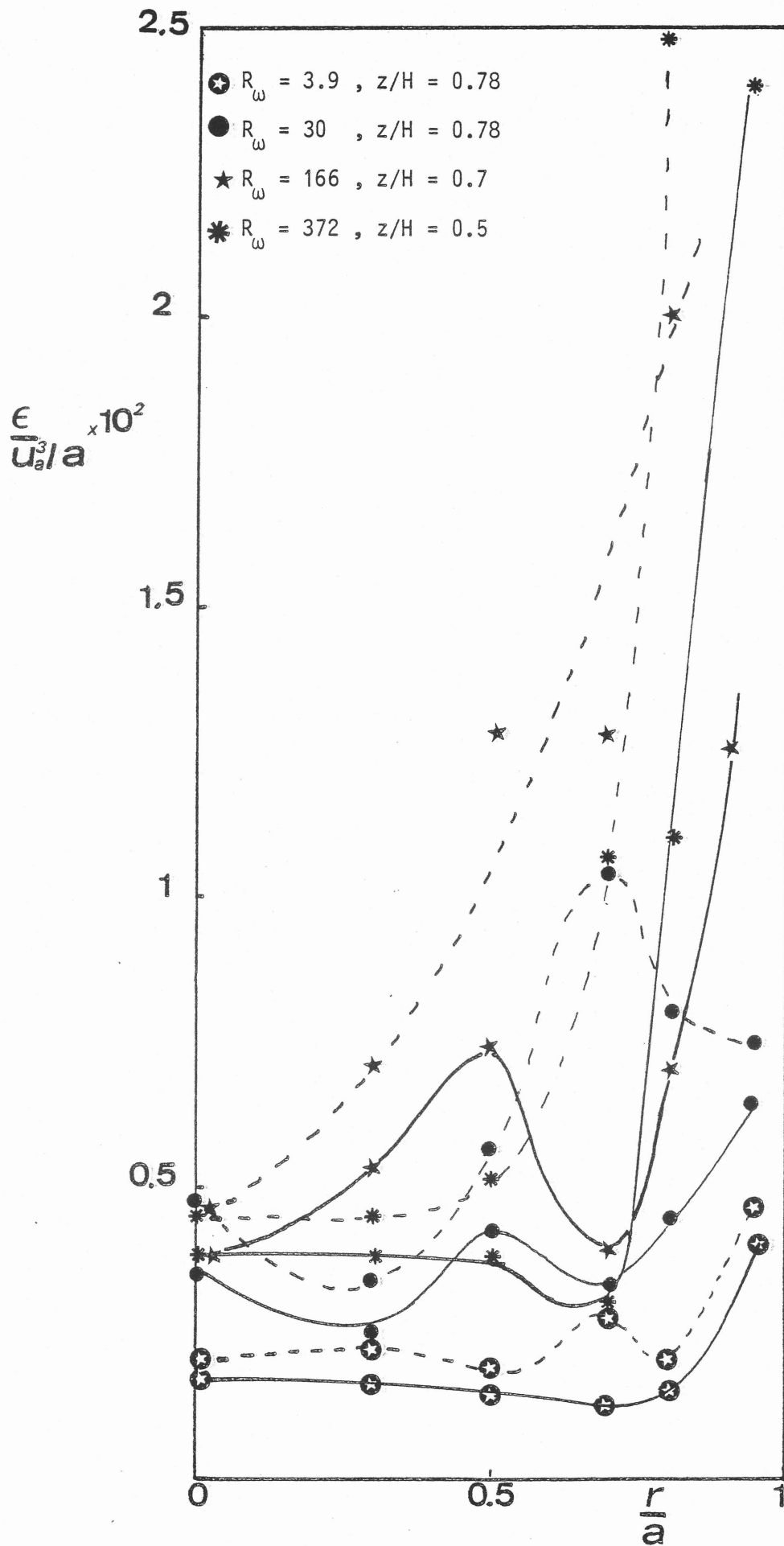


FIG. 21 : Profils radiaux du taux de dissipation (normalisé par u_a^3/a) à travers le coeur d'un vortex pour différentes fréquences (— avec correction de Lumley, --- sans correction de Lumley)

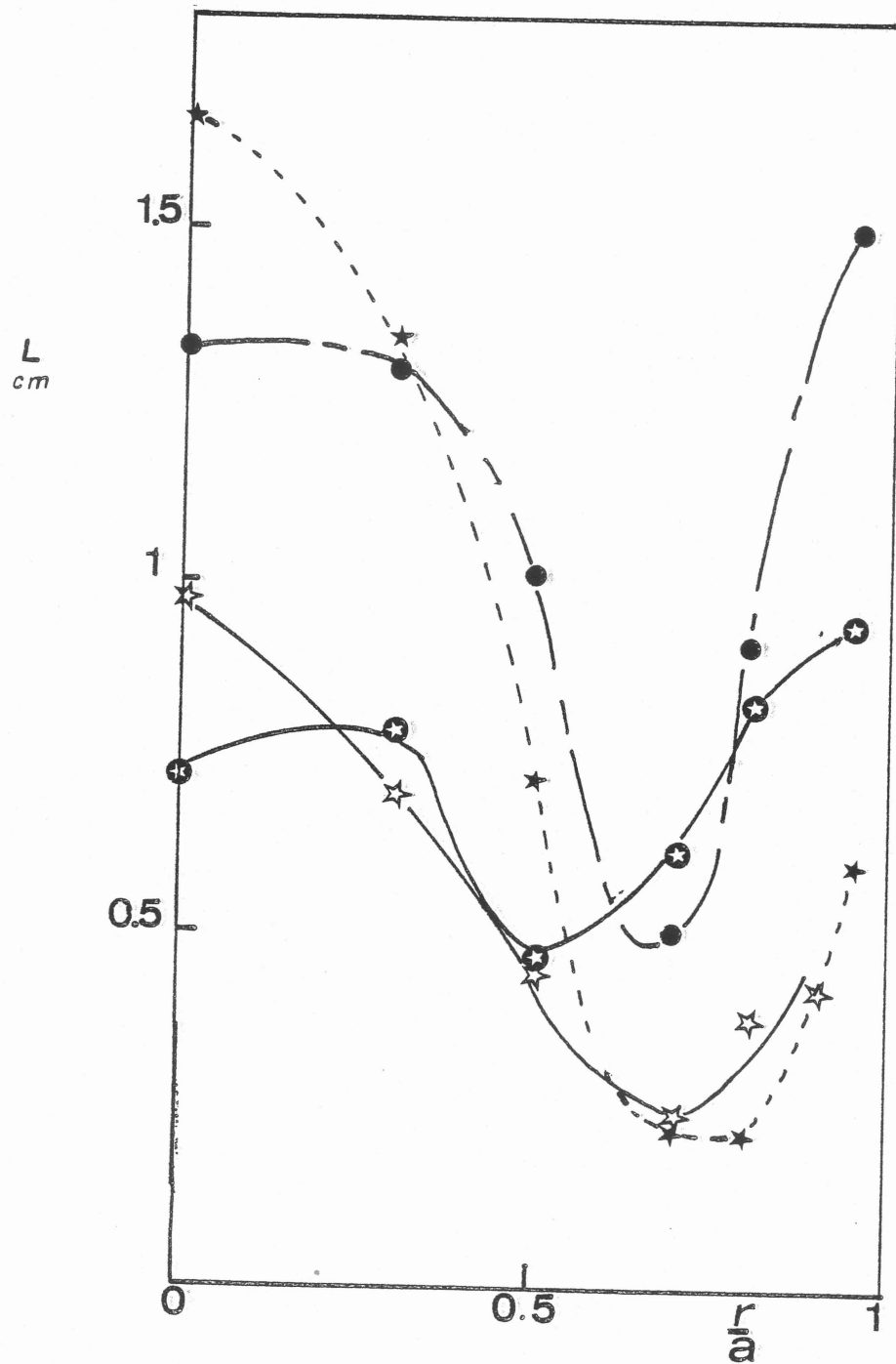
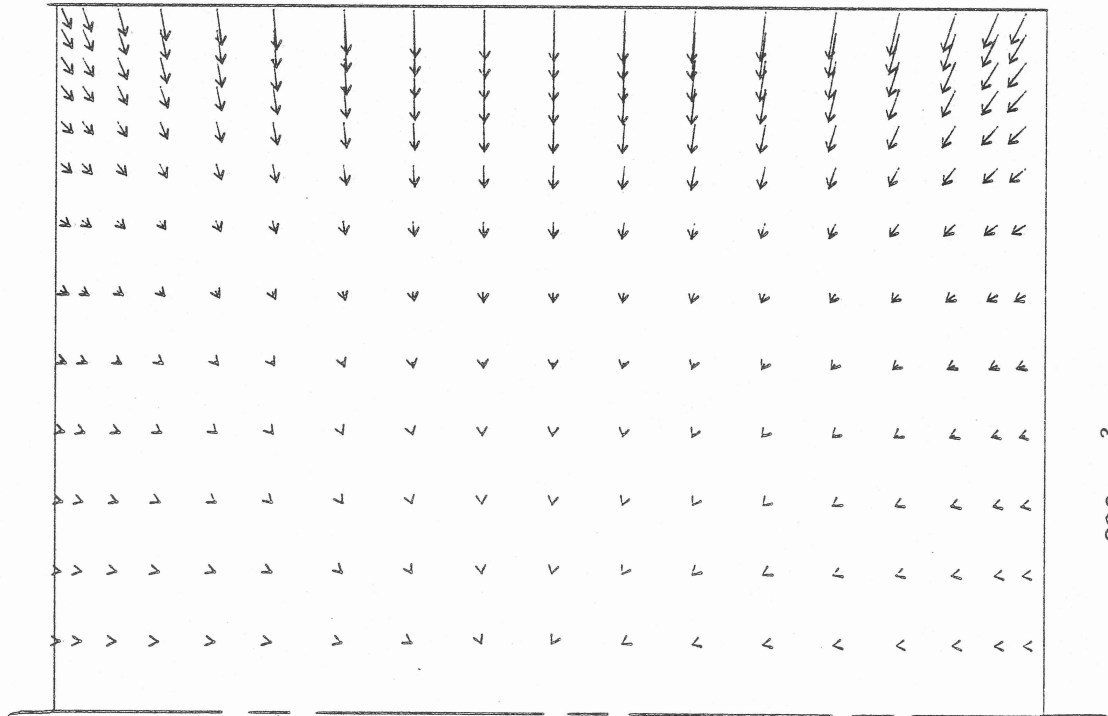


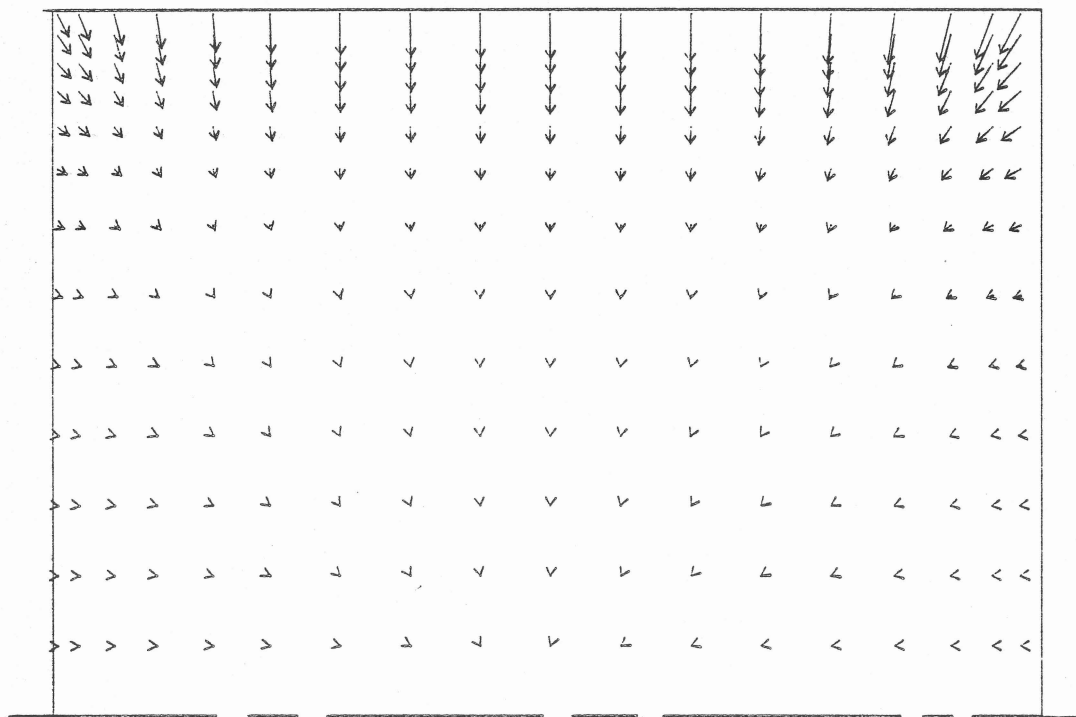
FIG. 22 : Profils radiaux de l'échelle intégrale à travers le coeur d'un vortex

- \odot $R_\omega = 3.9$, $z/H = 0.78$
- \bullet $R_\omega = 30.$, $z/H = 0.78$
- \star $R_\omega = 166.$, $z/H = 0.7$
- \star $R_\omega = 372.$, $z/H = 0.5$



→ 330 N/m³

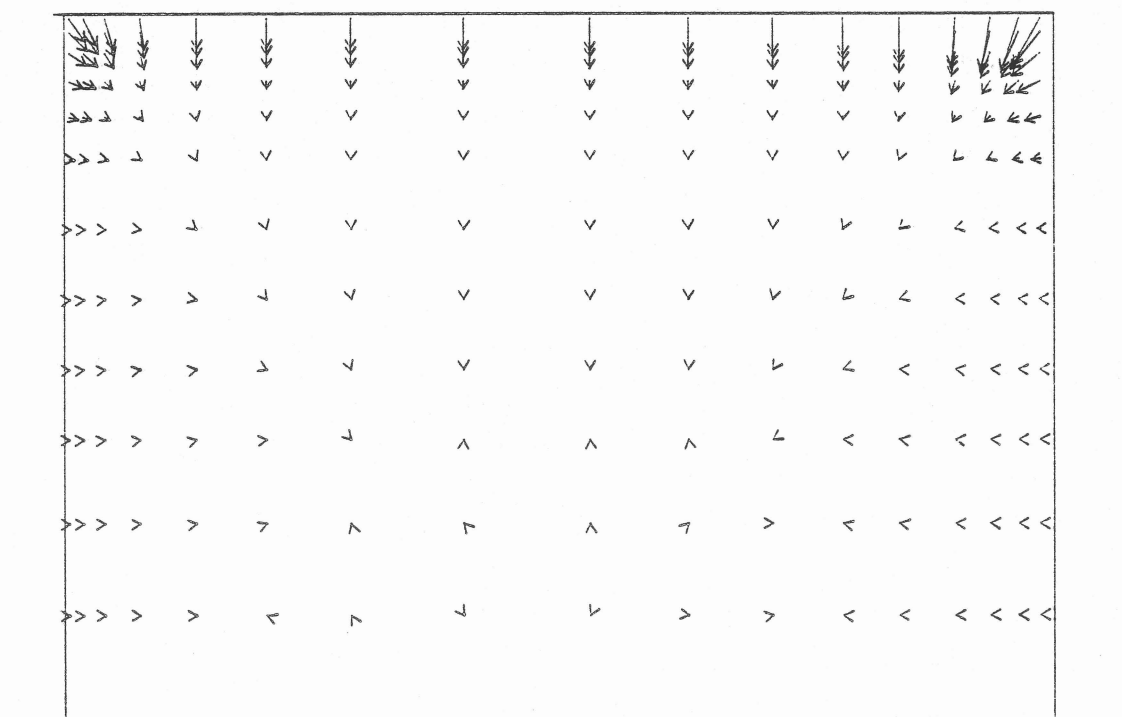
FIG. 23 : Configuration des forces électromagnétiques calculée numériquement
 $R_w = 3.9$



→ 2830 N/m³

FIG. 24 : Configuration des forces électromagnétiques calculée numériquement

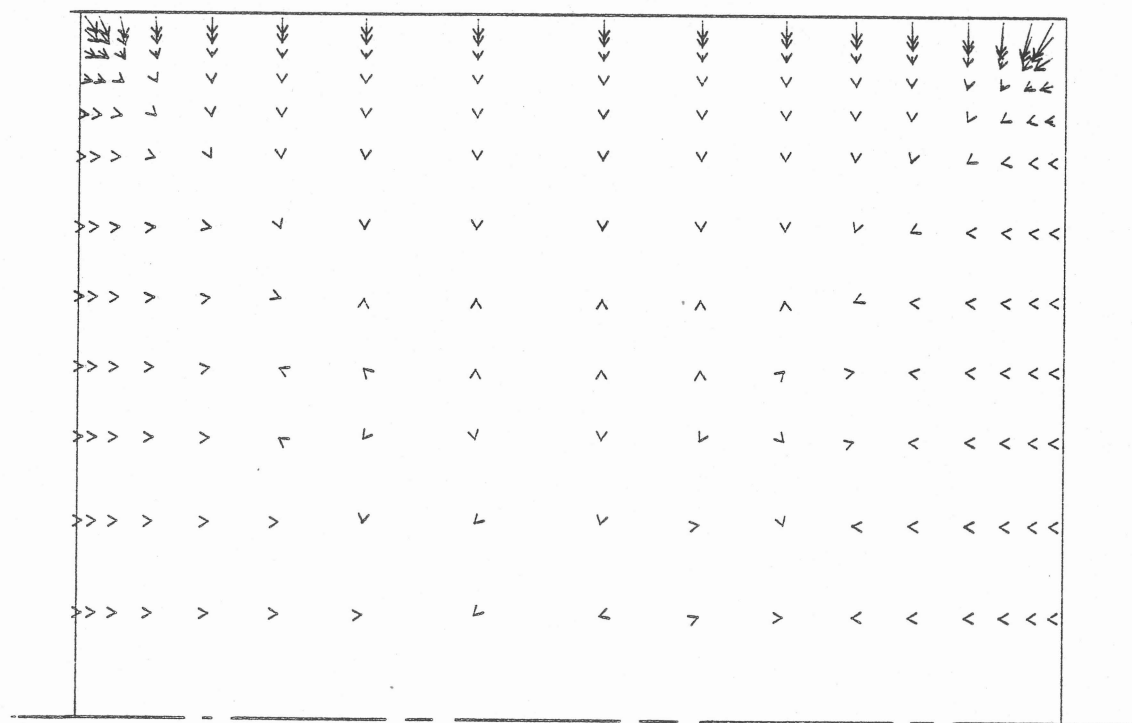
$$R_{\omega} = 30$$



→ 6100 N/m³

FIG. 25 : Configuration des forces électromagnétiques calculée numériquement

$R_{\omega} = 166$



→ 10700 NM³

FIG. 26 : Configuration des forces électromagnétiques calculée numériquement

$$R_{\omega} = 372$$

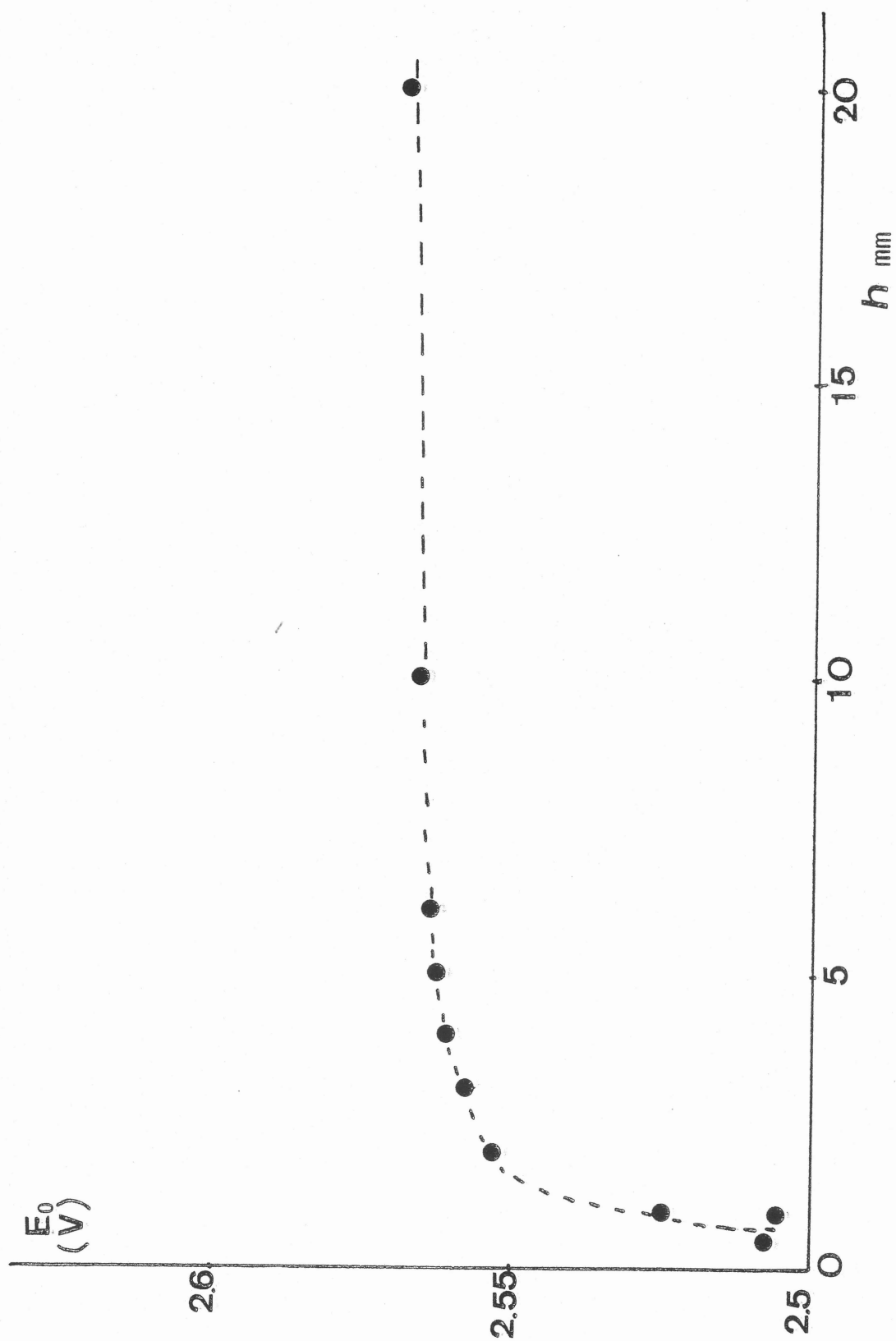


FIG. 27 : Tension à vitesse nulle à différentes profondeurs (h est mesuré depuis la surface libre).

DEUXIEME PARTIE

LA MODÉLISATION NUMÉRIQUE

II.1. LE MODELE

La prédiction d'un écoulement turbulent nécessite l'utilisation d'un modèle de turbulence.

Dans le cas considéré ici, la turbulence n'est pas affectée, ni par l'effet de dissipation Joule, ni par la partie pulsatoire des forces électromagnétiques. (Voir par exemple [1]). Aussi les modèles classiques de turbulence peuvent-être utilisés. Parmi les nombreux modèles disponibles, le modèle $k-\epsilon$, [2], est un des mieux adaptés pour une telle géométrie.

La procédure générale consiste, premièrement à calculer les forces électromagnétiques en résolvant les équations de Maxwell qui sont découplées de celles du mouvement. Les forces de Lorentz ainsi calculées sont ensuite introduites dans les équations du mouvement qui sont résolues simultanément avec deux équations de transport supplémentaires pour k et ϵ .

La description détaillée du code utilisé est donnée dans la notice jointe en annexe. Le maillage utilisé ici est en 22×22 points.

II.2. LE PROBLEME DES CONDITIONS AUX LIMITES

Dans un tel modèle, l'influence des conditions limites est de première importance en ce qui concerne la précision des résultats. Elles consistent en l'introduction du frottement à la paroi et du taux de dissipation moyen au voisinage de la paroi à l'aide de fonctions dites de paroi (cf annexe).

Dans le cas des faibles peaux électromagnétiques, le confinement des forces exige une attention spéciale dans la région pariétale.

Dans le présent travail, nous avons examiné le comportement du modèle $k-\epsilon$ avec respectivement deux types de fonctions de parois :

- Le premier, qu'on référera modèle I, consiste en l'utilisation des conditions limites basées sur les fonctions de paroi classiques. Celles-ci sont déduites du profil universel de vitesse pour les couches limites turbulentes sans gradient de pression et sans force de volume, c'est-à-dire, le profil logarithmique [2].

- Le second type de conditions limites (modèle II), valide dans le cas des faibles peaux, est obtenu à partir de l'équilibre local entre les contraintes de Reynolds et les forces électromagnétiques. Cet équilibre correspond au premier ordre du développement des équations de la couche limite (cf 1ère partie). On obtient alors une expression explicite pour la contrainte de frottement dans la peau, donnée par :

$$(1) \quad \tau = \frac{\delta}{2} F_p e^{-2y/\delta}$$

où F_p est la force électromagnétique à la paroi, parallèle à celle-ci.

Cette expression conduit aux nouvelles fonctions de paroi utilisées dans le modèle II. Elles sont explicitées en annexe 2.

II.3. RESULTATS.

Le modèle numérique a été comparé avec les deux cas limites expérimentaux, soient :

$\delta/a = 0.7$ (le régime des basses fréquences)

$\delta/a = 0.07$ (le régime des hautes fréquences)

Les comparaisons portent sur les valeurs de u , k et ϵ . Les valeurs expérimentales de k ont été déduites de celles de la vitesse turbulente u' , en faisant l'hypothèse d'isotropie d'où :

$$k = \frac{3}{2} u'^2$$

Dans le cas des basses fréquences, les résultats du modèle I sont en bon accord avec les mesures comme le montrent les figures 1, 2, 3, 4.

La prédiction des profils de k et ϵ est tout à fait remarquable compte tenu des approximations dont est issu le modèle k- ϵ .

Dans ce cas, la région pariétale n'intervient pas fondamentalement dans l'équilibre des forces, pour l'écoulement (cf 1ère partie).

En conséquence, les fonctions de parois classiques, basées sur le loi logarithmique, sont tout à fait valides. Cette bonne prédiction du modèle k- ϵ

dans le cas des basses fréquences, a déjà été mise en évidence par d'autres auteurs en ce qui concerne l'écoulement moyen et l'intensité turbulente [3], [4]. Nos résultats généralisent ces conclusions pour les trois variables : u , k , ϵ .

Une conclusion tout à fait analogue a été obtenue pour la fréquence de 400 Hz lors de la comparaison entre nos mesures et des calculs effectués au MIT par El-Kaddah - Szekely à l'aide d'un modèle $k-\epsilon$ également. (Travail en cours de publication).

Dans le cas des hautes fréquences, les deux modèles I et II ont été testés. Il est clair à partir des figures 5, 6, 7, 8 que la modification des lois de paroi conduit à une amélioration significative de la détermination de l'écoulement moyen et des caractéristiques de la turbulence.

L'interprétation est assez simple. Effectivement, sans maillage raffiné dans la peau, les fonctions de paroi sont censées rendre compte de l'équilibre qui s'y effectue. Or, les fonctions de paroi déterminées à partir de la loi logarithmique supposent une contrainte de frottement constante dans toute la peau ; ce qui en regard de l'équation (26), (cf première partie) ne peut permettre l'équilibre des forces. Au contraire, l'expression de la contrainte donnée par la relation (1) est issue de cet équilibre et conduit donc à des résultats plus réalistes.

La figure 9 présente les variations, en fonction du paramètre R_w , de deux vitesses caractéristiques de l'écoulement (normalisées par u_a)

- u_m est la vitesse maximale à la paroi,
- u_0 est une vitesse caractéristique sur l'axe du creuset (obtenue en moyennant la valeur absolue de la vitesse le long de l'axe).

Les résultats numériques (modèles I et II) et expérimentaux sont comparés simultanément.

Les nouvelles fonctions de paroi conduisent, à haute fréquence, à une décroissance de ces vitesses u_m et u_0 beaucoup moins rapide, dont la variation, environ en $R_w^{-0.3}$, se rapproche de l'estimation théorique en $R_w^{-\frac{1}{4}}$ et rend mieux compte des résultats expérimentaux.

II.4. CONCLUSION

Les résultats présentés ici montrent que, pour un maillage donné, la prédiction du modèle numérique s'éloigne de plus en plus des résultats expérimentaux à mesure que la fréquence augmente. Ce résultat est imputable au fait que la peau électromagnétique est de moins en moins prise en compte par le modèle. L'utilisation de fonctions de paroi déduites de l'équilibre des forces dans la peau, permet, pour un même maillage, de prolonger jusqu'à des fréquences élevées, l'aptitude de ce modèle, à prédire l'écoulement et la turbulence du brassage.

A N N E X E 1

Programme de calcul des écoulements incompressibles turbulents par le modèle k- ϵ

CHAPITRE I. DESCRIPTION GENERALE.

CHAPITRE II. DISCRETISATION DES EQUATIONS.

1. *Description du maillage*
2. *Discretisation des équations pour les points intérieurs du domaine.*
 - 2.1. *Discretisation de l'équation pour u*
 - 2.2. *Discretisation de l'équation pour v*
 - 2.3. *Discretisation de l'équation pour le scalaire passif*
 - 2.4. *Assemblage*
3. *Conditions aux limites.*
 - 3.1. *Conditions aux limites pour u en écoulement peu visqueux*
 - 3.2. *Conditions aux limites pour l'énergie cinétique de la turbulence*
 - 3.3. *Conditions aux limites pour le taux de dissipation turbulente.*

I. DESCRIPTION GENERALE.

TEACH est un programme écrit en FORTRAN IV destiné à calculer des écoulements (laminaires ou turbulents) bidimensionnels (plan ou de révolution) engendrés par des forces de volume données. Ce programme a été mis au point à Imperial College (London) et modifié en ce qui concerne l'introduction de forces de volume par J. EVANS (Univ. of Col., Berkeley).

TEACH est conçu pour les écoulements incompressibles essentiellement, néanmoins, la masse volumique ainsi d'ailleurs que toutes les autres propriétés physiques (telle la viscosité) peuvent être choisies variables dans l'espace. Il est en particulier conçu pour calculer des écoulements turbulents en utilisant des modèles de fermeture en un point (du type viscosité turbulente) du type $k-\epsilon$ où k et ϵ désignent respectivement l'énergie cinétique de la turbulence et le taux de dissipation turbulente.

Le programme résout les équations du mouvement en utilisant les variables "primitives" (à savoir : deux composantes de vitesse et la pression) et grâce à un schéma aux différences finies dans un maillage à grilles décalées. Il résout, en outre, en option deux équations de transport supplémentaires pour les fonctions k et ϵ suivant la nature du régime d'écoulement.

Les équations résolues par TEACH sont les suivantes :

a) Navier-Stokes :

$$\rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = - \vec{\nabla} p + \vec{F} + \text{div} \vec{\sigma}$$

avec : \vec{u} = champ de vitesse (u, v, o) en coordonnées cartésiennes (x, y, z) ou en coordonnées cylindriques (z, r, θ)

p = pression

ρ = masse volumique

\vec{F} = force de volume

$\vec{\sigma}$ = tenseur de contrainte que l'on peut relier au tenseur de vitesse de déformation \vec{e} dans l'hypothèse de Boussinesq :

$$\vec{\sigma} = 2\mu_t \vec{e}$$

(μ_t ou μ_e = viscosité turbulente ou effective).

La viscosité turbulente est reliée à k et ϵ dans le modèle $k-\epsilon$ par :

$$\mu_t = \mu + \rho C_\mu k^2 / \epsilon$$

avec : μ = viscosité moléculaire

$C_\mu = 0,09$ constante empirique.

b) Equations pour k et ε

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi = \vec{\nabla} \left(\frac{\mu_t}{\rho Pr_\phi} \vec{\nabla} \phi \right) + S_\phi$$

avec : $\phi = k$ ou ε

Pr_ϕ = nombre de Prandtl ou de Schmidt correspondant à la fonction ϕ

S_ϕ : terme source pour ϕ

Les termes source sont exprimés comme suit :

$$S_\phi = \begin{cases} \mathcal{P} - \varepsilon & \text{pour } \phi \equiv k \\ (c_{1\varepsilon} \frac{\mathcal{P}}{\varepsilon} - c_{2\varepsilon}) \varepsilon^2 / k & \text{pour } \phi \equiv \varepsilon \end{cases}$$

\mathcal{P} désignant le terme de production = $\frac{\mu_t}{\rho} (e_{ij} e_{ij})$
 e_{ij} = composante de \vec{e} .

II. DISCRETISATION DES EQUATIONS.

1. Description du maillage.

Ce maillage utilisé est décalé (cf figure 2 ci-après). On distingue trois grilles :

- la grille correspondant aux noeuds où sont calculés les scalaires tels que la pression p , la température T , la viscosité turbulente ν_t etc...

(repérée par \circ)

- la grille pour la composante u repérée par \blacktriangleright

- la grille pour la composante v repérée par Δ

On utilisera par la suite les coordonnées cylindriques (z, r, θ) .
 Celles-ci correspondent à deux dimensions aux coordonnées (x, y, z) .

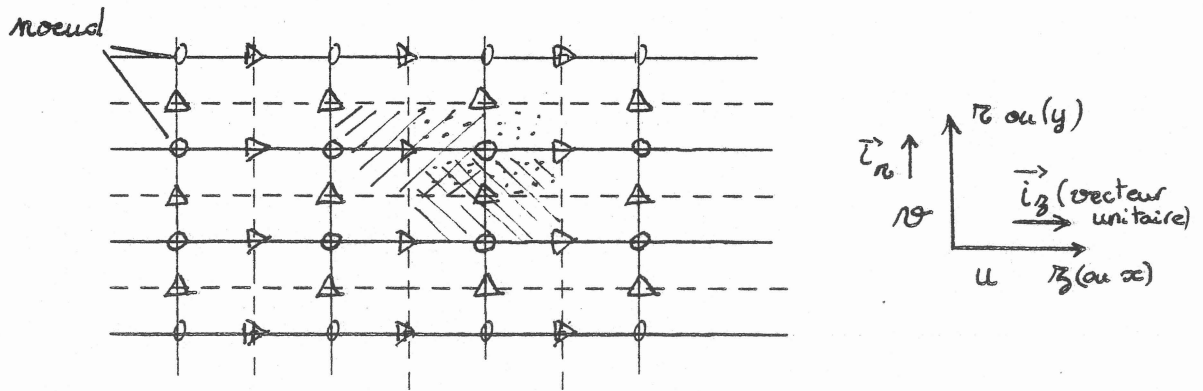


Figure 1. Schéma du maillage.

2. Discretisation des équations pour les points intérieurs du domaine

Considérons le champ de vitesse $\vec{u} = (u, v, 0)$, la pression p et un scalaire passif T . Ceux-ci sont régis par des équations de transport, soit :

- pour le mouvement :

$$(1) \quad \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = - \vec{\nabla} p + \text{div} \vec{\sigma} + \vec{F}$$

$$(2) \quad \text{div} (\rho \vec{u}) = 0$$

où ρ = masse volumique

$\vec{\sigma}$ = tenseur de contrainte

p = pression

\vec{F} = force de volume.

- Pour un scalaire passif :

$$(3) \quad \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T = \text{div} (\rho \chi \vec{\nabla} T) - \chi \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho S$$

χ = diffusivité de la quantité considérée

S = terme source

La procédure de discrétisation consiste à intégrer les équations dans les mailles correspondant à la variable considérée. Le théorème de la divergence permet de transformer certaines intégrales de volume en intégrales de flux.

Le tenseur de contrainte $\vec{\sigma}$ peut être relié, pour un fluide newtonien, au tenseur du taux de déformation \vec{e} , soit :

$$\vec{\sigma} = 2\mu \vec{e}$$

Dans les modèles de viscosité turbulente, on pose alors

$$\vec{\sigma} = 2\mu_t \vec{e}$$

où μ_t désigne alors la viscosité turbulente fonction du point.

On note que l'on peut aussi faire intervenir le nombre de Prandtl turbulent Pr_t (ou Schmidt selon le cas) en posant :

$$\rho \chi_t = \rho \nu_t Pr_t = \mu_t Pr_t$$

2.1. Discrétisation de l'équation pour u.

On intègre la première composante de l'équation (1) (projection axiale) dans le volume dont la section méridienne est hachurée /// en figure 1 (voir aussi figure 2). Soit V_u et S_u respectivement le volume de contrôle et la surface qui l'entoure. Soit la première composante :

$$(4) \quad \int_{V_u} \rho (\vec{u} \cdot \vec{\sigma}) u \, d\omega = - \int_{V_u} \frac{\partial p}{\partial z} \, d\omega + \int_{V_u} \vec{i}_3 \cdot \text{div} \vec{\sigma} \, d\omega + \int_{V_u} F_3 \, d\omega$$

On applique le théorème de la divergence pour chaque terme de (4) et l'on obtient finalement grâce à l'équation de continuité :

$$(5) \quad \int_{S_u} \rho u (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, ds = - \int_{V_u} \frac{\partial p}{\partial z} \, d\omega + \int_{V_u} F_3 \, d\omega + \int_{S_u} \vec{i}_3 \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \, ds$$

\vec{n} désignant la normale extérieure au volume.

On considère un point P et les noeuds qui l'entoure repérés par N, W, S, E. Ce point P aura une numérotation générale (i, j) dans le maillage. Néanmoins, il est commode pour la discrétisation d'adopter cette sous-numérotation.

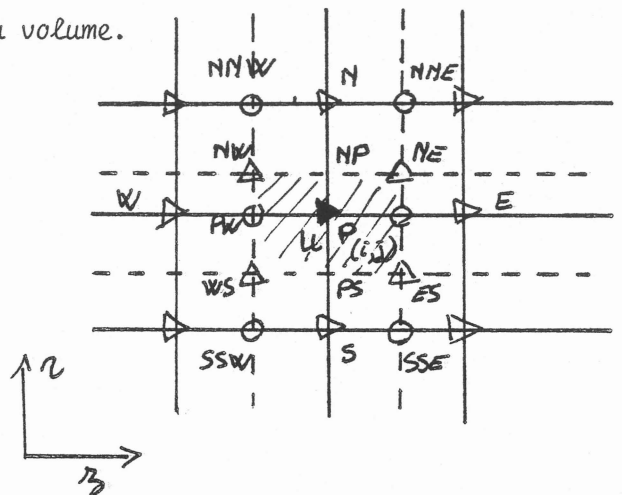


Figure 2 : Maille pour u

En utilisant les notations ci-dessus, on décompose l'intégrale de surface en quatre parties correspondant aux côtés du volume V_u :

$$\int_{S_u} = \int_{S_N} + \int_{S_W} + \int_{S_S} + \int_{S_E}$$

2.1.1. Terme de diffusion

La discrétisation du terme de diffusion est la suivante :

$$\begin{aligned} \int_{S_N} \vec{e}_3 \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) ds &\equiv \int_{S_N} \sigma_{zz} ds \simeq 2\pi r_{NP} (z_{NE} - z_{NW}) \sigma_{zz}|_{NP} \\ \int_{S_W} \dots &\equiv - \int_{S_W} \sigma_{zz} ds \simeq 2\pi r_P (r_{NP} - r_{PS}) \sigma_{zz}|_{PW} \\ &\vdots \end{aligned}$$

d'où finalement le terme de diffusion :

$$(6) \quad \frac{1}{\pi} \mathcal{D}_u = 2 (z_{NE} - z_{NW}) (r_{NP} \sigma_{zz}|_{NP} - r_{PS} \sigma_{zz}|_{PS}) + 2 r_P (r_{NP} - r_{PS}) (\sigma_{zz}|_{PE} - \sigma_{zz}|_{PW})$$

Si l'on explicite les contraintes en fonction des déformations :

$$\sigma_{zz} = 2\mu_e \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{et} \quad \sigma_{rz} = \mu_e \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

d'où les formes discrétisées de σ_{zz} et de σ_{rz} :

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}|_{PW} &\simeq 2\mu_e|_{PW} \left[\frac{u_P - u_W}{z_P - z_W} \right] \\ \sigma_{zz}|_{PE} &\simeq 2\mu_e|_{PE} \left[\frac{u_E - u_P}{z_E - z_P} \right] \\ \sigma_{rz}|_{NP} &\simeq \mu_e|_{NP} \left[\frac{u_N - u_P}{r_N - r_P} + \frac{v_{NE} - v_{NW}}{z_{PE} - z_{PW}} \right] \\ \sigma_{rz}|_{PS} &\simeq \mu_e|_{PS} \left[\frac{u_P - u_S}{r_P - r_S} + \frac{v_{ES} - v_{WS}}{z_{PE} - z_{PW}} \right] \end{aligned}$$

Notons que $\mu_e(PW)$ et $\mu_e(PE)$ correspondent directement aux valeurs des noeuds alors que $\mu_e(NP)$ et $\mu_e(PS)$ doivent être interpolés, par exemple de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mu_e|_{NP} &= \frac{1}{4} (\mu_e|_{PW} + \mu_e|_{PE} + \mu_e|_{NW} + \mu_e|_{NE}) \\ \mu_e|_{PS} &= \frac{1}{4} (\mu_e|_{PW} + \mu_e|_{PE} + \mu_e|_{SW} + \mu_e|_{SE}) \end{aligned}$$

Notons en outre que v_{NE} , v_{NW} , v_{ES} correspondent directement aux noeuds du maillage pour v .

2.1.2. Terme de convection.

On discrétise le terme de convection \mathcal{E}_u en décomposant l'intégrale de surface sur chaque surface S_N , S_W , S_S d'une manière analogue au terme de diffusion

$$\frac{1}{\pi} \mathcal{E}_u = \int_{S_u} \rho u (\vec{u} \cdot \vec{n}') ds = \int_{S_N} + \dots + \int_{S_S}$$

Par exemple, la discrétisation sur S_N donne :

$$(7) \quad \frac{1}{\pi} \int_{S_N} \rho u (\vec{u} \cdot \vec{n}') ds \simeq u_{NP} \int_{S_N} \rho \vec{u} \cdot \vec{n}' \frac{ds}{\pi} = u_{NP} q_N$$

avec $q_N = \int_{S_N} \rho \vec{u} \cdot \vec{n}' \frac{ds}{\pi} =$ débit massique à travers S_N .

En réalité, la discrétisation (7) représente la dérivée centrée de u dans le terme convectif, ce qui peut poser certains problèmes de convergence. On peut lui préférer le schéma décentré amont qui se traduit analytiquement de la manière suivante :

$$\int_{S_N} \rho u (\vec{u} \cdot \vec{n}') ds = \begin{cases} u_P q_N & \text{si } q_N > 0 \\ u_N q_N & \text{si } q_N < 0 \end{cases} \equiv \frac{u_P}{2} (q_N + |q_N|) + \frac{u_N}{2} (q_N - |q_N|)$$

Ce schéma traduit physiquement le fait que l'information arrive toujours d'abord de l'amont. La discrétisation des termes correspondant à S_W , S_E , S_S est semblable d'où finalement :

$$\frac{2}{\pi} \mathcal{E}_u = \sum_{i=N,W,\dots} u_P (q_i + |q_i|) + u_i (q_i - |q_i|)$$

ou encore puisque la conservation de la masse à travers \mathcal{V}_u impose $\sum_{i=N,\dots} q_i = 0$

$$(8) \quad \boxed{\frac{2}{\pi} \mathcal{E}_u = \sum_{i=N,S,W,E} (u_i - u_P) (q_i - |q_i|)}$$

Les débits partiels q_i peuvent être discrétisés comme suit :

$$\begin{aligned}
 q_N &= \int_{S_u} \rho \vec{u} \cdot \vec{n}' \frac{ds}{\pi} \simeq 2 \rho_{NP} v_{NP} (z_{PE} - z_{PW}) r_{NP} \\
 q_W &\simeq -2 \rho_{PW} u_{PW} r_P (r_{NP} - r_{PS}) \\
 q_S &\simeq -2 \rho_{PS} v_{PS} (z_{PE} - z_{PW}) r_{PS} \\
 q_E &\simeq 2 \rho_{PE} u_{PE} r_P (r_{NP} - r_{PS})
 \end{aligned}
 \quad (9)$$

ρ_{NP} et ρ_{PS} peuvent être interpolés d'une manière analogue aux fonctions u_e

$$v_{NP} = \frac{1}{2} (v_{NE} + v_{NW})$$

$$v_{PS} = \frac{1}{2} (v_{ES} + v_{WS})$$

$$u_{PW} = \frac{1}{2} (u_P + u_W)$$

$$u_{PE} = \frac{1}{2} (u_E + u_P)$$

2.1.3. Termes de pression et force

La discrétisation est extrêmement simple :

$$\frac{1}{\pi} \oint \vec{F} = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_u} \left(F_z - \frac{\partial p}{\partial z} \right) d\Omega \simeq \left(F_z - \frac{\partial p}{\partial z} \right)_P 2 r_P (r_{NP} - r_{PS}) (z_{PE} - z_{PW})$$

la dérivée $\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_P$ est facilement estimable :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_P \simeq \frac{p_{PE} - p_{PW}}{z_{PE} - z_{PW}}$$

2.2. Discrétisation de l'équation pour v

On intègre la composante radiale de l'équation (1) dans le volume de contrôle dont la section méridienne est hachurée /// en figure 1 (voir aussi la figure 3 ci-après). Après application du théorème de la divergence on obtient :

$$(10) \quad \int_{S_{10}} \rho (\vec{u} \cdot \vec{r}') r' ds = - \int_{\Omega_v} \frac{\partial p}{\partial z} d\Omega + \int_{\Omega_v} F_r d\Omega + \int_{S_{10}} \vec{r}' (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}') ds$$

On utilise les mêmes notations que précédemment pour la grille de v (cf figure 3).

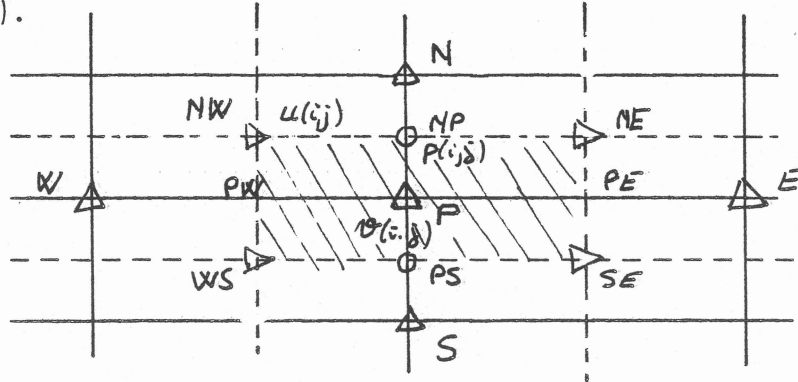


Figure 3 : Maillage pour v

La procédure de discrétisation est tout-à-fait comparable à celle du paragraphe 2.1.

2.2.1. Terme de diffusion.

La discrétisation du terme de diffusion est la suivante :

$$\int_{S_N} \vec{e}_2 \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) d\lambda = \int_{S_N} \sigma_{22} dS \simeq 2\pi r_{NP} (r_{PE} - r_{PN}) \sigma_{22} |_{NP}$$

$$\int_{S_W} \vec{e}_2 \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) dS = \int_{S_W} -\sigma_{23} dS \simeq -2\pi r_P (r_{NP} - r_{PS}) \sigma_{23} |_{PW}$$

d'où finalement le terme de diffusion :

$$(11) \quad \frac{1}{\pi} \mathcal{D}_v = 2 (r_{PE} - r_{PW}) (r_{NP} \sigma_{22NP} - r_{PS} \sigma_{22PS}) + 2r_P (r_{NP} - r_{PS}) (\sigma_{23PE} - \sigma_{23PW})$$

La forme explicite de σ_{22} en fonction des gradients de v est :

$$\sigma_{22} = 2\mu_e \frac{\partial v}{\partial r}$$

d'où les formes discrétisées de σ_{r2} et σ_{r3} :

$$\sigma_{r2 NP} \simeq 2\mu_{e NP} \left(\frac{v_N - v_P}{r_N - r_P} \right)$$

$$\sigma_{r2 PS} \simeq 2\mu_{e PS} \left(\frac{v_P - v_S}{r_P - r_S} \right)$$

$$\sigma_{r3 PE} \simeq \mu_{e PE} \left[\frac{u_{NE} - u_{SE}}{r_{NP} - r_{PS}} + \frac{v_E - v_P}{r_E - r_P} \right]$$

$$\sigma_{r3 PW} \simeq \mu_{e PW} \left[\frac{u_{NW} - u_{WS}}{r_{NP} - r_{PS}} + \frac{v_P - v_W}{r_P - r_W} \right]$$

les interpolations de $\mu_{e(PE)}$ et $\mu_{e(PW)}$ peuvent être effectuées d'une manière semblable à celles du paragraphe 2.1.

2.2.2. Terme de convection.

Le terme de convection est tout-à-fait semblable à celui de l'équation pour u (cf équation (8)) :

$$(12) \quad \mathcal{C}_v = \int_{S_v} c v (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds \simeq \frac{\pi}{2} \sum_{i=N,S,W,E} (q_i - |q_i|) (v_i - v_P)$$

les q_i étant définis d'une manière analogue à (9) pour la grille pour v .

2.2.3. Terme de pression et de force.

Comme pour le paragraphe 2.1.3. :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_P} \left(F_r - \frac{\partial P}{\partial r} \right) d\Omega \simeq \left(F_r - \frac{\partial P}{\partial r} \right) 2r_P (r_{NP} - r_{PS}) (r_{PE} - r_{PW})$$

la dérivée $\left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_P$ peut être estimée comme suit :

$$\left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_P \simeq \frac{P_{NP} - P_{PS}}{r_{NP} - r_{PS}}$$

2.3. Discretisation de l'équation pour le scalaire passif T.

Comme précédemment on intègre l'équation (3) dans un volume de contrôle V_n centré autour d'un noeud (repéré en figure 1 par les points. Voir aussi figure 4).

Après utilisation du théorème de la divergence, on obtient :

$$\int_{S_n} \rho T (\vec{u} \cdot \vec{n}') ds = \int_{S_n} \rho \chi_t \vec{\nabla} T \cdot \vec{n}' ds - \int_{\sigma_n} \chi_t \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nu}' d\sigma + \int_{\sigma_n} \rho S d\sigma$$

Le volume de contrôle V_n entouré par S_n est défini en figure 4. Les notations restent identiques.

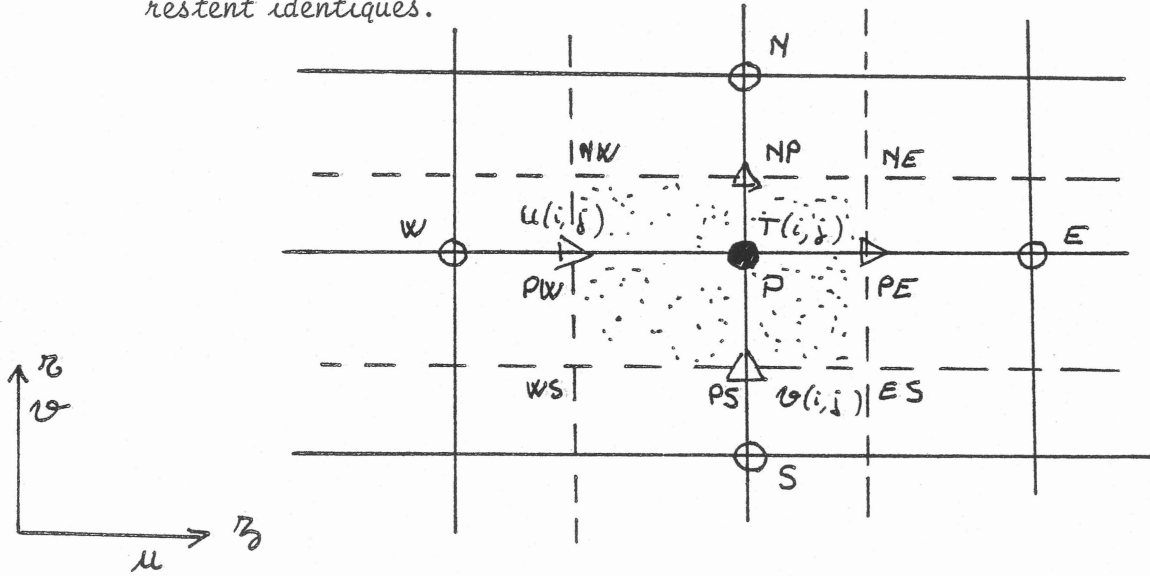


Figure 4 : Maillage pour les scalaires passifs.

2.3.1. Terme de diffusion.

On distingue comme précédemment chaque contribution des surfaces $S_N, S_W \dots$ à l'intégrale de surface (ces contributions représentent physiquement les flux), soit :

$$\int_{S_N} \rho \chi_t \vec{\nabla} T \cdot \vec{n}' ds \equiv \int_{S_N} \rho \chi_t \frac{\partial T}{\partial z} ds \simeq (\rho \chi_t)_{NP} \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{NP} \times 2\pi r_{NP} (z_{PE} - z_{PW})$$

$$\int_{S_W} \rho \chi_t \vec{\nabla} T \cdot \vec{n}' ds \equiv \int_{S_W} -\rho \chi_t \frac{\partial T}{\partial z} ds \simeq -(\rho \chi_t)_{PW} \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{PW} \times 2\pi r_P (z_{NP} - z_{PS})$$

En utilisant le nombre de Prandtl turbulent Pr_t , le terme de diffusion devient :

$$\frac{1}{\pi Pr_t} \mathcal{D}_T = 2(\beta_{PE} - \beta_{PW}) \left[\alpha_{NP} \mu_{eNP} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{NP} - \alpha_{PS} \mu_{ePS} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{PS} \right] \\ + 2\alpha_P (\alpha_{NP} - \alpha_{PS}) \left[\mu_{ePE} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{PE} - \mu_{ePW} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{PW} \right]$$

les quantités $\left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{NP}$, $\left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{PS}$... sont facilement interpolables :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{NP} \simeq \frac{T_N - T_P}{\alpha_N - \alpha_P}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{PS} \simeq \frac{T_P - T_S}{\alpha_P - \alpha_S}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{PE} \simeq \frac{T_E - T_P}{\beta_E - \beta_P} \\ \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{PW} \simeq \frac{T_P - T_W}{\beta_P - \beta_W}, \text{ tandis que par exemple } (\mu_e)_{NP} \simeq \frac{1}{2} (\mu_{eN} + \mu_{eP}) \dots$$

2.3.2. Terme de convection.

Le terme de convection est tout-à-fait semblable à celui du paragraphe 2.1.2 ou 2.2.2, soit :

$$\frac{1}{\pi} \mathcal{C}_T \equiv \frac{1}{\pi} \int_{S_N} T \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds \simeq \frac{1}{2} \sum_{i=N, W, S, E} (T_i - T_P) (q_i - |q_i|)$$

les q_i ont la même définition que précédemment.

2.3.3. Termes sources.

Les termes "sources" sont :

$$\mathcal{S} \equiv \int_{\Omega} (\rho S - \chi_t \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} \rho) d\Omega$$

dont la discrétisation peut être réalisée comme suit :

$$\mathcal{S} \simeq (\rho S - \chi_t \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} \rho) 2\pi \alpha_P (\alpha_{NP} - \alpha_{PS}) (\beta_{PE} - \beta_{PW})$$

la quantité $\vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} \rho = \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial \beta} \frac{\partial \rho}{\partial \beta}$ peut être estimée par des dérivées centrées ; par exemple :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_P \simeq \frac{(T_N - T_S)(\rho_N - \rho_S)}{(\alpha_N - \alpha_S)^2}$$

2.4. Assemblage.

En regardant les termes discrétisés, on obtient en chaque point une équation de la forme suivante :

- pour les inconnues u et v : $\mathcal{E} - \mathcal{D} = \mathcal{F}$

- pour les scalaires passifs : $\mathcal{E} - \mathcal{D} = 0$

Considérons par exemple l'équation pour v ; on obtient alors en chaque noeud :

$$(16) \quad 2(\beta_{PE} - \beta_{PW}) \left[r_{PS} \sigma_{r_{PS}} - r_{NP} \sigma_{r_{NP}} \right] + 2r_p (r_{NP} - r_{PS}) \left[\sigma_{\beta_{PW}} - \sigma_{\beta_{PE}} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=N, \dots} (q_i - |q_i|) (\vartheta_i - \vartheta_p) = \left(F_p - \frac{P_{NP} - P_{SP}}{r_{NP} - r_{PS}} \right) \vartheta_p,$$

avec $\vartheta_p = 2r_p (r_{NP} - r_{PS}) (\beta_{PE} - \beta_{PN})$,

L'équation ci-dessus peut être mise sous la forme suivante :

- $A_p \vartheta_p + A_N \vartheta_N + A_W \vartheta_W + A_S \vartheta_S + A_E \vartheta_E + SU = 0$

SU désignant le deuxième membre,

avec :

$$A_N = -2r_{NP} (\beta_{PE} - \beta_{PW}) \times 2\mu_{eNP} / (r_N - r_p) + \frac{1}{2} (q_N - |q_N|)$$

$$A_S = -2r_{PS} (\beta_{PE} - \beta_{PW}) \times 2\mu_{ePS} / (r_p - r_s) + \frac{1}{2} (q_s - |q_s|)$$

$$A_W = -2r_p (r_{NP} - r_{PS}) \times \mu_{ePW} / (\beta_p - \beta_w) + \frac{1}{2} (q_w - |q_w|)$$

$$A_E = -2r_p (r_{NP} - r_{PS}) \times \mu_{ePE} / (\beta_E - \beta_p) + \frac{1}{2} (q_E - |q_E|)$$

$$A_p = A_N + A_S + A_W + A_E ;$$

$$SU = 2r_p \left[\mu_{ePW} (u_{NW} - u_{WS}) - \mu_{ePE} (u_{NE} - u_{SE}) \right] - \left(F_p - \frac{P_{NP} - P_{SP}}{r_{NP} - r_{PS}} \right) \vartheta_p$$

En ce qui concerne le scalaire passif T , les coefficients $A_N, A_S \dots$ sont les suivants :

$$A_N = -2 (\beta_{PE} - \beta_{PW}) P_{2t} \mu_{eNP} / (r_N - r_P) + \frac{1}{2} (q_N - |q_N|)$$

$$A_S = -2 (\beta_{PE} - \beta_{PW}) P_{2t} \mu_{ePS} / (r_P - r_S) + \frac{1}{2} (q_S - |q_S|)$$

$$A_W = -2 r_P (r_{NP} - r_{PS}) P_{2t} \mu_{ePW} / (\beta_P - \beta_W) + \frac{1}{2} (q_W - |q_W|)$$

$$A_E = -2 r_P (r_{NP} - r_{PS}) P_{2t} \mu_{ePE} / (\beta_E - \beta_P) + \frac{1}{2} (q_E - |q_E|)$$

$$SU = -(\phi_S)_P V_T + \text{éventuellement un terme correctif.}$$

3. CONDITIONS AUX LIMITES.

Les conditions aux limites naturelles sont :

- pour le champ de vitesse :

$$\vec{u} = 0 \text{ aux parois (adhérence à la paroi)}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ et frottement nul à une surface libre (n désignant la normale à la paroi).}$$

- pour les scalaires passifs :

$$\frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T = \beta, \quad \alpha, \beta = \text{constantes données,}$$

ceci correspondant à une condition imposée de l'extérieur (flux ou valeur à la paroi).

L'équation de ces conditions aux limites pose un certain nombre de problèmes pour les écoulements à grands nombres de Reynolds en général et turbulents en particulier. En effet, la vitesse, dans ce cas, ne tend vers zéro à la paroi que dans une zone très proche de celle-ci, i.e., la couche limite en régime laminaire et la sous-couche visqueuse en régime turbulent. Ces zones peuvent être très fines : de l'ordre de quelques dizaines de microns. Notons que ce phénomène concerne aussi tous les scalaires passifs (températures, énergie cinétique de turbulence, etc...). L'existence de telles zones nécessite un traitement numérique spécifique et il convient donc d'examiner d'une manière plus approfondie la traduction numérique des conditions aux limites.

3.1. Conditions aux limites pour \vec{u} en écoulement peu visqueux.

Pour un écoulement faiblement visqueux (à grand nombre de Reynolds), la vitesse s'annule dans une couche limite d'épaisseur δ très fine. Le phénomène se complique lorsque l'écoulement est turbulent puisqu'il apparaît alors à l'intérieur de la couche limite une sous-couche visqueuse d'épaisseur δ_0 , comme l'illustre la figure 5 ci-dessous :

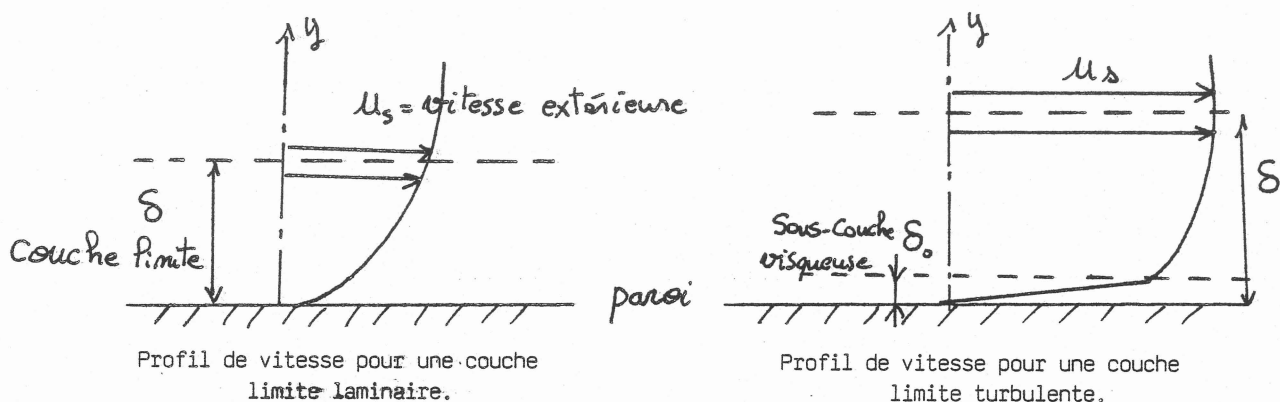


Figure 5.- Structures de la couche limite.

La prise en compte de la couche limite (ou éventuellement de la sous-couche visqueuse) nécessite un raffinement notable du maillage près de la paroi, ce qui requiert un nombre de points importants. Pour pallier cet inconvénient on procède de la manière suivante :

- Considérons une frontière quelconque du domaine et le maillage correspondant (cf figure 6). Notons que ce qui suit est valable, quelle que soit la frontière, néanmoins pour illustrer le calcul nous avons choisi une frontière perpendiculaire à l'axe du domaine. On appelle traditionnellement y la distance comptée à partir de la paroi.

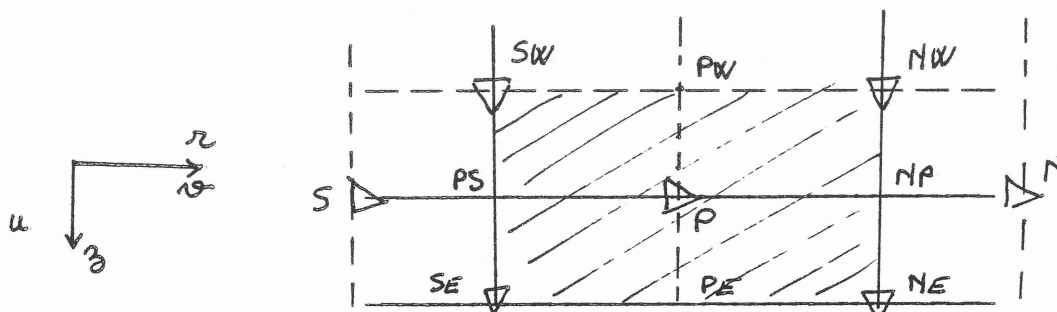


Figure 6.- Discrétisation au voisinage d'une frontière.

3.1.1. Cas d'une paroi.

Considérons le point P (cf figure 6) au voisinage de la frontière et considérons la discrétisation de l'équation du mouvement pour v (vitesse le long de la frontière). La maille est globalement identique à celle du point intérieur de la figure 3 excepté le bord NE-SE du volume de contrôle qui est maintenant confondu avec la frontière du domaine. La discrétisation de l'équation pour v en P sera identique à celle du point intérieur (paragraphe 2.2.) avec néanmoins les différences suivantes :

a) Sur la frontière SE-NE en vertu de la condition de non-flux :

$$u_{SE} = u_{NE} = 0$$

b) Si le point P se trouve dans la couche limite laminaire (ou la sous-couche visqueuse en régime turbulent), alors il est légitime d'estimer σ_{xz}/PE par les dérivées de u et v :

$$\sigma_{xz}|_{PE} = \mu_{ePE} \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{PE} = \mu_{ePE} \frac{\partial v}{\partial x}|_{PE} \approx -\mu_{ePE} \frac{v_P}{y_P}$$

L'erreur commise sur la dérivée $\frac{\partial v}{\partial x}|_{PE}$ est raisonnable.

c) Si le point P se trouve en dehors de la couche limite laminaire (ou la sous-couche visqueuse en régime turbulent) alors l'estimation de la dérivée $\frac{\partial v}{\partial x}$ à la frontière par la discrétisation (17) devient totalement erronée. Comme $\sigma_{xz}|_{PE}$ représente le frottement le long de la frontière, il s'agit d'estimer le frottement (éventuellement turbulent) pariétal.

Si l'écoulement est turbulent, le frottement pariétal est relié à la vitesse de frottement u_* , à savoir :

$$(18) \quad \sigma_{xz}|_{paroi} \equiv \rho u_*^2$$

La valeur de u_* est déduite de la loi logarithmique qui gouverne le profil de vitesse moyen au voisinage de la paroi en régime turbulent :

$$(19) \quad v_P / u_* = \frac{1}{K} \log(\alpha y_P / \delta_0)$$

où K est la constante de Karman et α une constante empirique (cf par exemple Schlichting, 1966). Une variante consiste à déduire u_* de l'énergie cinétique de la turbulence k_p au voisinage de la paroi, soit :

(19)

$$u_*^2 = C_\mu^{1/2} k_p,$$

où C_μ est une constante empirique voisine de 0,09 (cf par exemple A. Reynolds, 1974).

Pratiquement, $\sigma_{kz/PE}$ peut être estimé comme suit :

$$(20) \quad (\sigma_{kz})_{PE} = C_{PE} C_\mu^{1/4} R_p^{1/2} v_p / \left(\frac{1}{K} \log(\alpha y_{p+}) \right), \text{ avec } y_+ = \frac{y}{\delta_0}.$$

La forme (20) permet d'expliciter $\sigma_{kz/PE}$ en fonction linéaire de v_p .

La discrétisation de l'équation pour v au point P est semblable à celle de l'équation (16) en remplaçant $\sigma_{kz/PE}$ par l'expression (20), d'où les différences suivantes :

$$q_E = 0 \text{ soit : } A_E = 0$$

$$\text{et } A_P = A_N + A_S + A_W + 2r_p (r_{NP} - r_{PS}) PE C_\mu^{1/4} \kappa_p^{1/2} / \left(\frac{1}{K} \log(xy_{p+}) \right)$$

les autres coefficients restant inchangés.

3.2. Conditions aux limites pour l'énergie cinétique de la turbulence.

Considérons le cas où le scalaire passif est constitué par k , l'énergie cinétique de la turbulence. Pour que la conservation de l'énergie soit respectée, il importe que globalement dans tout le domaine V

$$\int_V (P - \epsilon) dv = 0,$$

ce qui assure que la puissance des forces extérieures soit égale à la puissance totale dissipée par la turbulence. Ceci requiert d'après l'équation pour k que

$$\frac{\partial k}{\partial n} = 0$$

sur toute les frontières du domaine.

Si l'on prend par exemple le cas de la figure 6, la discrétisation en P de l'équation pour k sera analogue à l'équation (16) avec $A_E = 0$.

Il est à noter que, près de la paroi, il est délicat d'estimer les termes de production ainsi que ϵ en raison des variations rapides à la fois

des dérivées de \vec{u} et de ϵ . Aussi pour ϵ_p est-il souhaitable d'adopter une valeur moyenne au point P définie comme suit :

$$(21) \quad \bar{\epsilon}_p = \frac{1}{y_p} \int_{\delta_0/\alpha}^{y_p} \epsilon dy$$

peut être relié à la vitesse de frottement au voisinage de la paroi comme suit :

$$(22) \quad \epsilon = \frac{u_*^3}{l} \quad \text{avec } l = \text{échelle des tourbillons} \approx k y$$

d'où finalement la valeur moyenne de $\bar{\epsilon}_p$:

$$(23) \quad \bar{\epsilon}_p = \frac{u_*^3}{k y_p} \text{Log} \left(\alpha \frac{y_p}{\delta_0} \right) = C_\mu^{3/4} \frac{R_p^{3/2}}{k y_p} \text{Log} (\alpha y_{p+})$$

Le pivot, i.e., le coefficient A_p , prend alors la forme suivante :

$$(24) \quad A_p = A_N + A_W + A_S + \sigma_{PE} C_\mu^{3/4} k^{3/2} \text{Log} (\alpha y_{p+}) V_k / K y_p$$

3.3. Conditions aux limites pour le taux de dissipation turbulente.

Les modèles de turbulence classiques utilisent pour définir ϵ_p la relation (22). On en déduit directement sans avoir recours à l'équation pour ϵ la valeur ϵ_p :

$$(25) \quad \epsilon_p = \frac{u_*^3}{k y_p} = C_\mu^{3/4} \frac{k_p^{3/2}}{k y_p}$$

A N N E X E 2

Calcul des nouvelles fonctions de paroi.

A partir de l'expression de la contrainte de frottement [relation (1)] on déduit les différentes fonctions de parois se substituant aux relations (20), (23) de l'annexe 1.

La détermination du frottement à la paroi est immédiate et la relation (20) devient :

$$(20') \quad (\sigma_{rz})_{PE} = \frac{\delta}{2} F_p$$

En utilisant les relations (19) et (22) de l'annexe 1 et en prenant un développement limité au 1er ordre de la contrainte [expression (1)] la relation (23) devient :

$$(23') \quad \varepsilon_p = \frac{1}{\Pi} \left(\frac{\delta}{2 y_p} F_p \right)^{1/2} C_u^{1/2} k_p$$

La fonction de paroi (20') s'introduit dans une variable SU alors que la fonction (23') s'introduit dans une variable SP (voir annexe 1).

B I B L I O G R A P H I E

- [1] BARBIER J.N., FAUTRELLE Y.R., EVANS J.W. et CREMER P., 1982 : "Simulation numérique des fours chauffés par induction".
J. Mec. Theor. Appl., 1, 533-556.

- [2] LAUNDER B.E. et SPALDING D.B., 1974 : "The numerical computation of turbulent flows, computer methods in applied mechanics and engineering".
North-Holland publishing Company, Vol. 3, 269-289.

- [3] EVANS J.W. and LYMPANY S.D., 1983 : "An improved mathematical model for melt flow in induction furnaces and comparison with experimental data".
Met. Trans., Vol. 14B, 306-308.

- [4] EL-KADDAH N. and SZEKELY J., 1983 : "The turbulent recirculating flow field in a coreless induction furnace. A comparison of theoretical prediction with measurements".
J. Fluid. Mech., 133, 37.

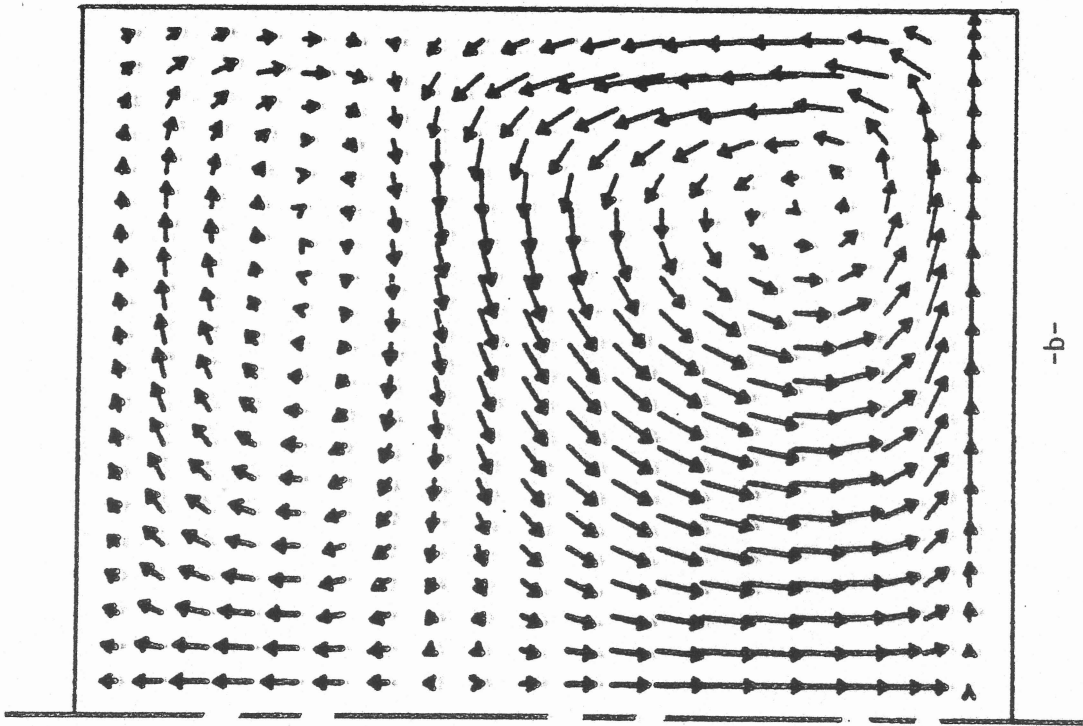
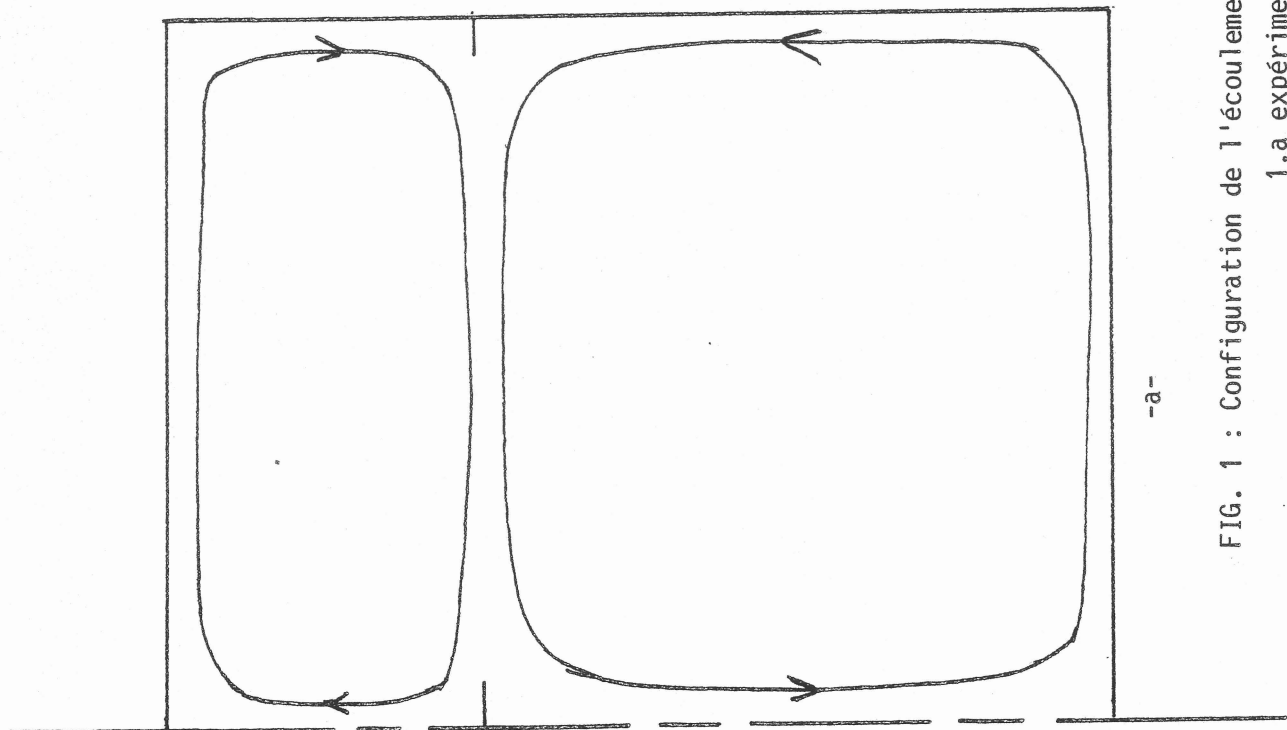


FIG. 1 : Configuration de l'écoulement à basse fréquence ($R_\omega = 3.9$)

1.a expérimentale

1.b numérique

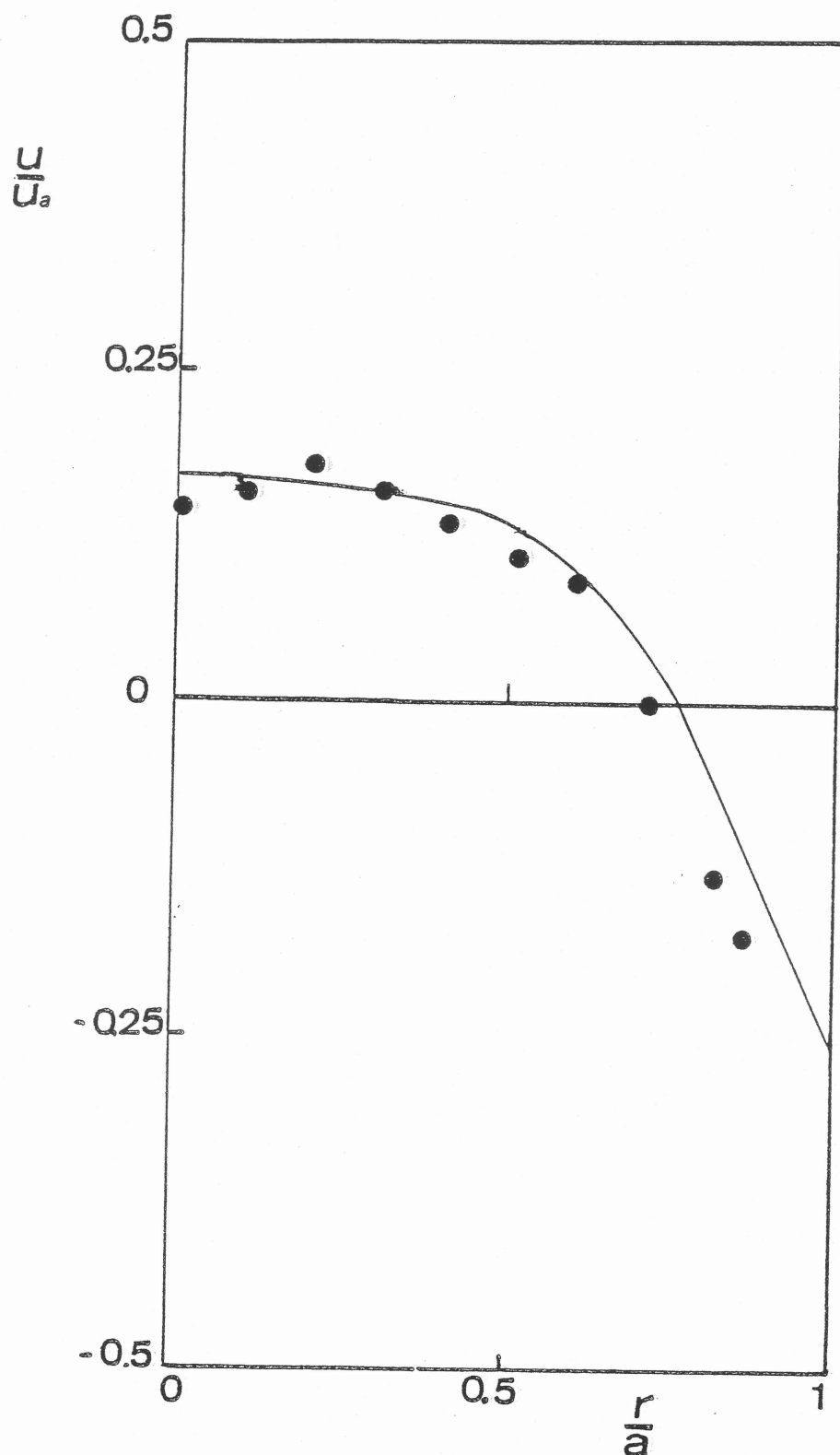


FIG. 2 : Profil radial de vitesse axiale à travers le coeur d'un vortex à basse fréquence ($R_\omega = 3.9$, la vitesse est normalisée par la vitesse d'Alfvén u_a)

● points expérimentaux
— courbe numérique

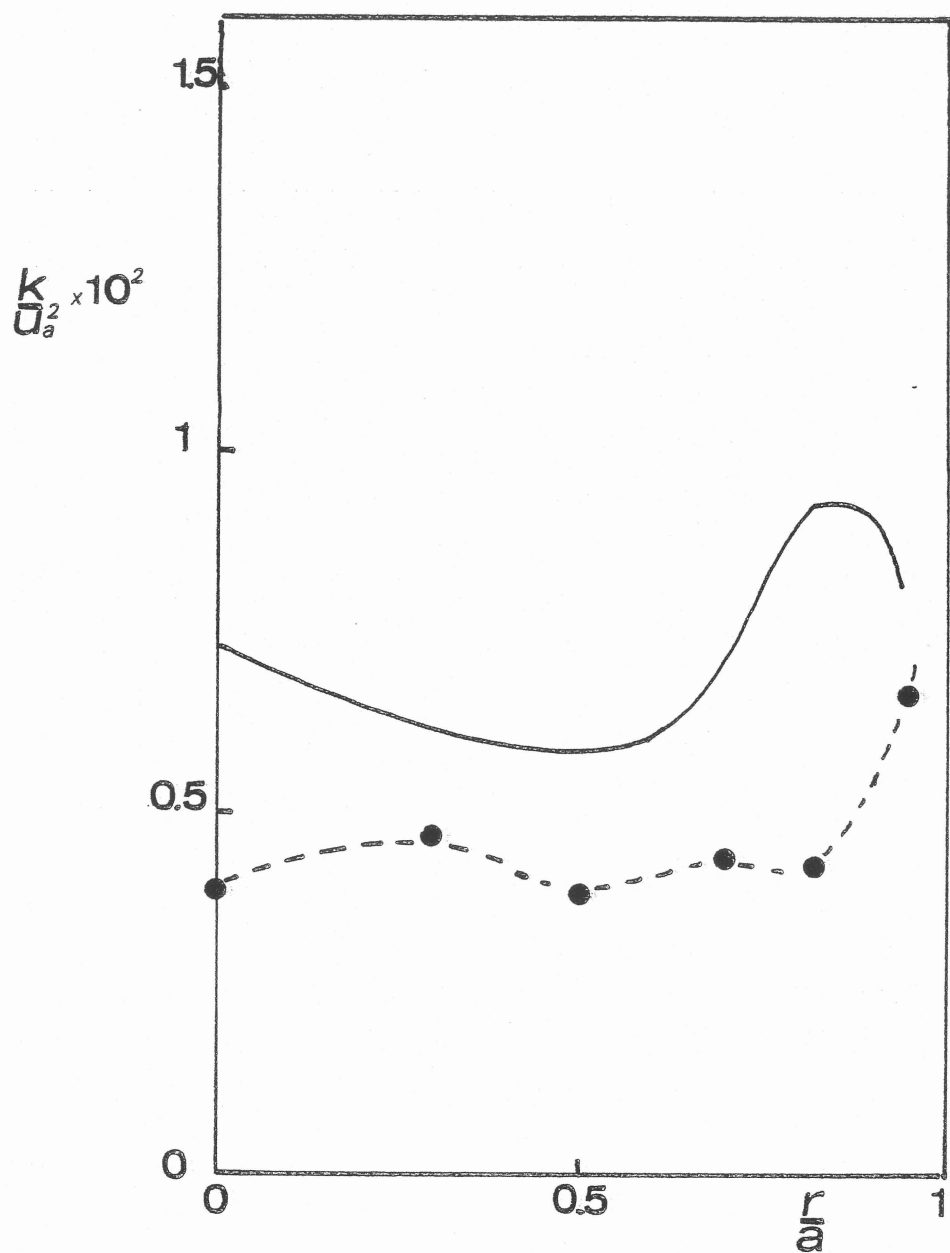


FIG. 3 : Profil radial de l'énergie cinétique de la turbulence à travers le coeur d'un vortex à basse fréquence ($R_\omega = 3.9$)

● points expérimentaux
— courbe numérique

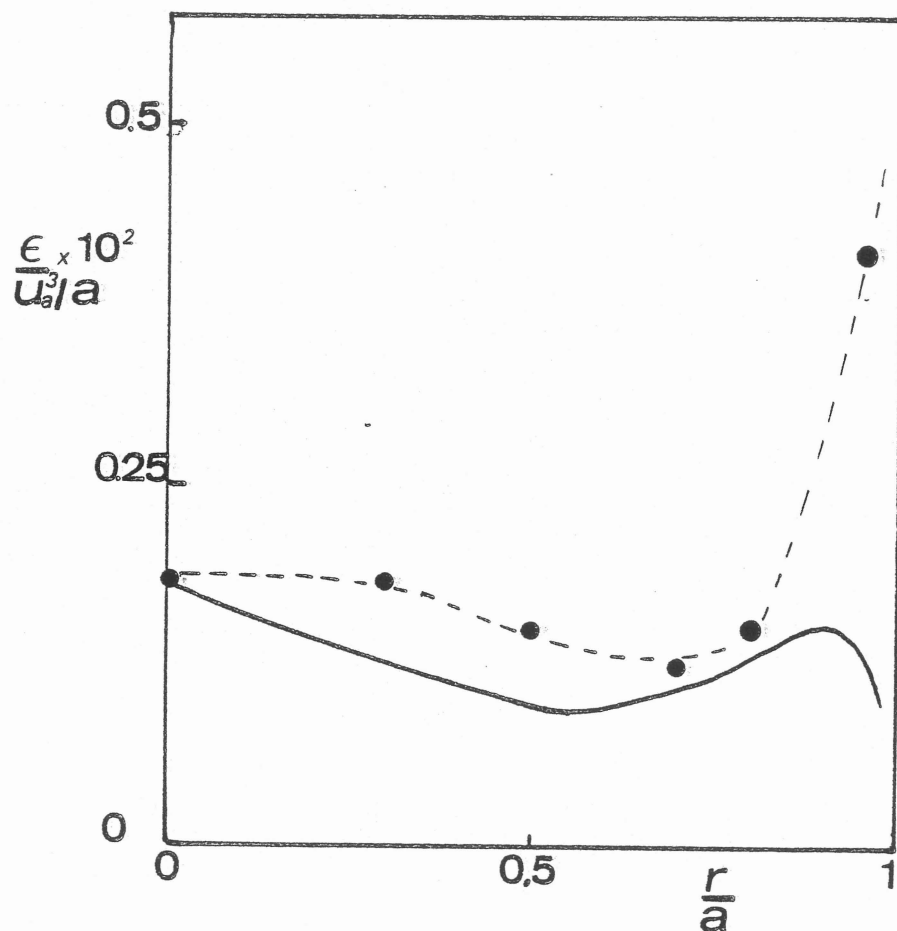
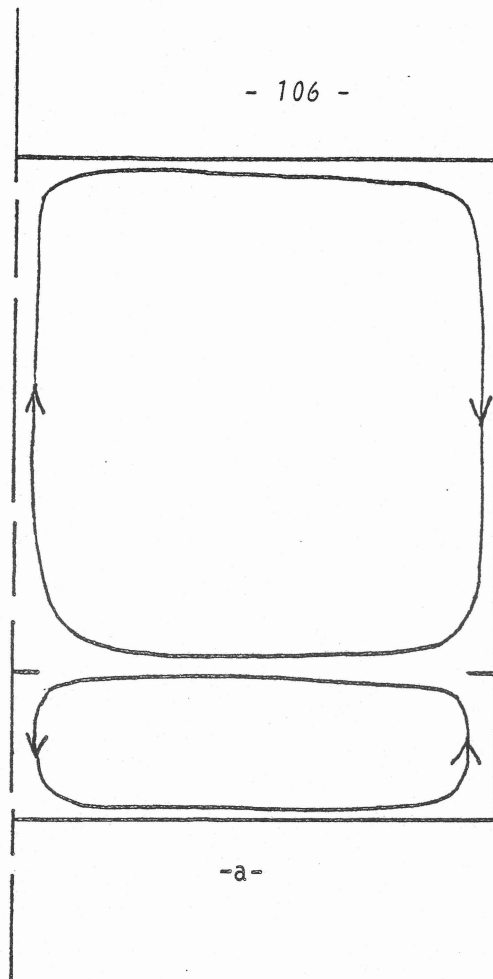
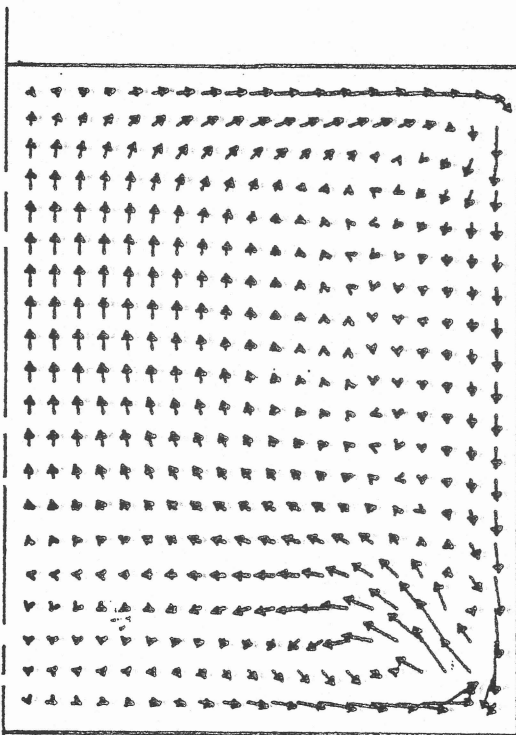


FIG. 4 : Profil radial du taux de dissipation turbulente à travers le cœur d'un vortex à basse fréquence ($R_\omega = 3.9$)

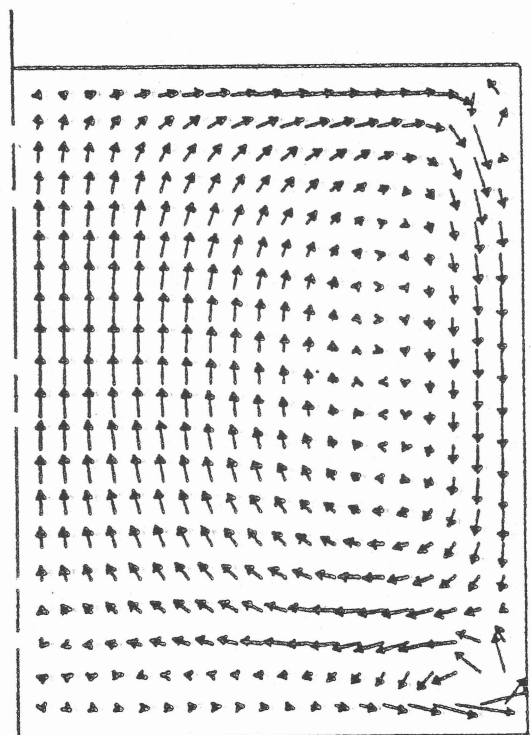
● Points expérimentaux
— Courbe numérique



-a-



-b-



-c-

FIG. 5 : Configuration de l'écoulement à haute fréquence ($R_\omega = 372$)

- 1.a expérimentale
- 1.b numérique avec fonctions de paroi classiques
- 1.c numérique avec nouvelles fonctions de paroi

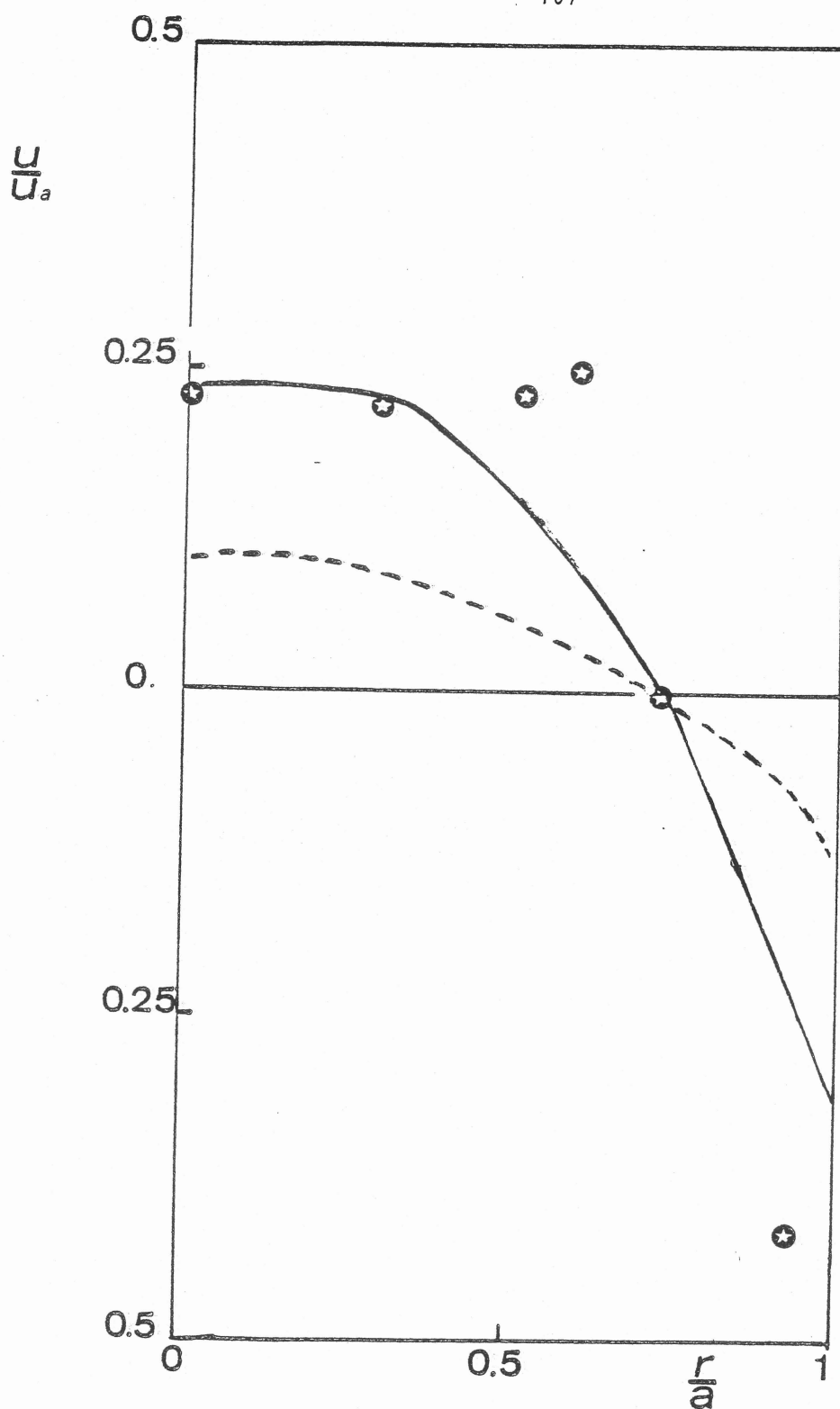


FIG. 6 : Profil radial de vitesse axiale à travers le coeur d'un vortex à haute fréquence ($R_\omega = 372$, la vitesse est normalisée par la vitesse d'Alfvén u_a) ^{ω}

- ★ points expérimentaux
- courbe numérique avec fonctions de paroi classiques
- courbe numérique avec nouvelles fonctions de paroi

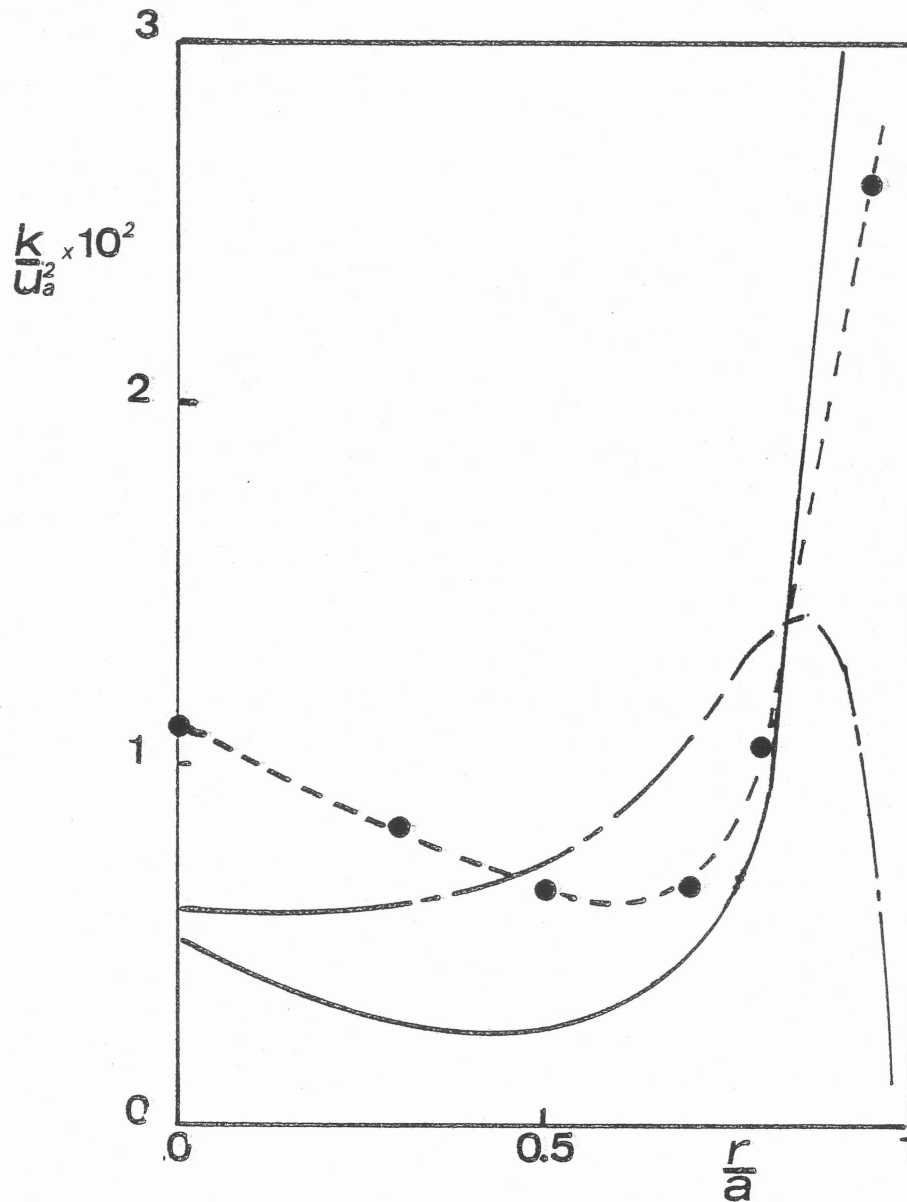


FIG. 7 : Profil radial de l'énergie cinétique de la turbulence à travers le coeur d'un vortex à haute fréquence ($R_\omega = 372$)

- points expérimentaux
- - - - - courbe numérique avec fonctions de paroi classiques
- courbe numérique avec nouvelles fonctions de paroi

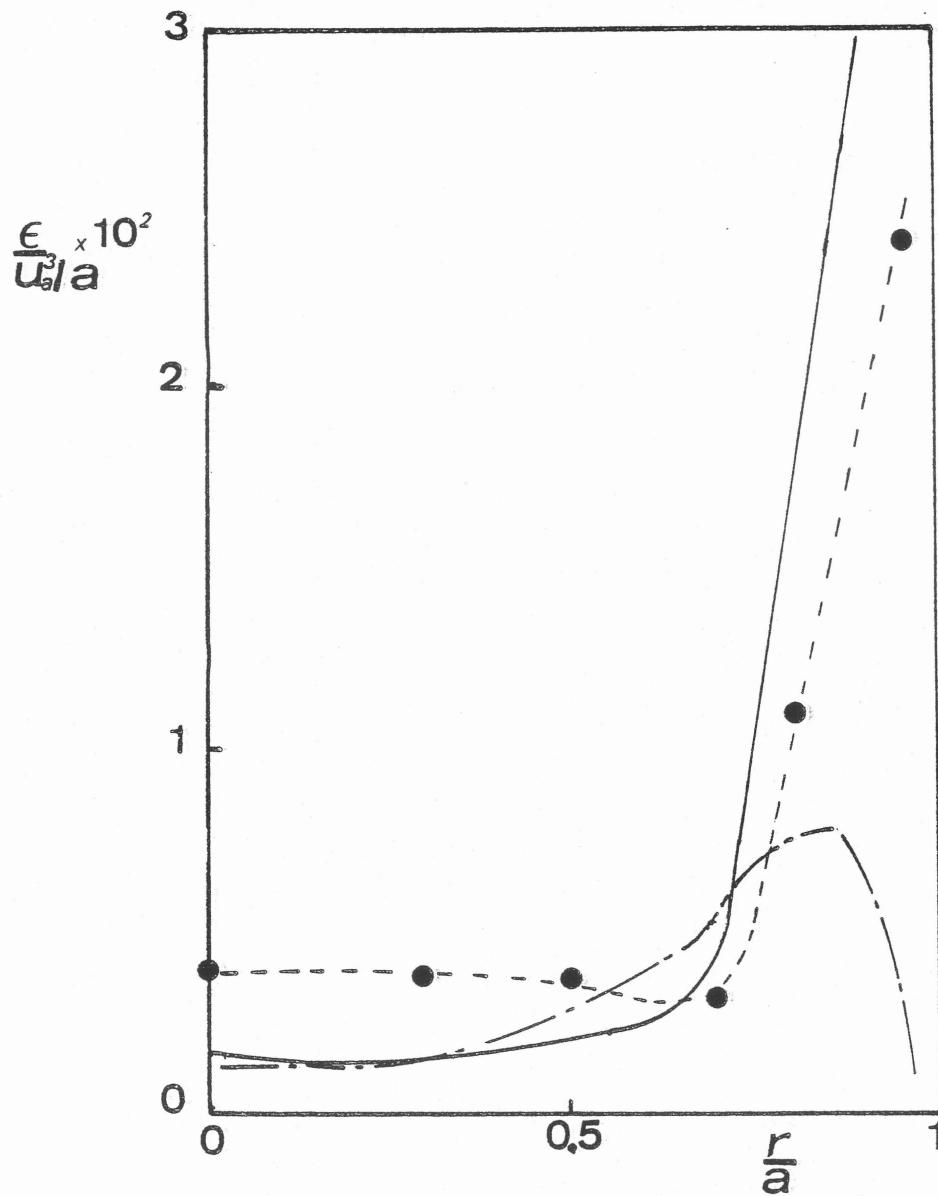


FIG. 8 : Profil radial du taux de dissipation turbulente à travers le coeur d'un vortex à haute fréquence ($R_\omega = 372$)

- points expérimentaux
- - - - - courbe numérique avec fonctions de paroi classiques
- courbe numérique avec nouvelles fonctions de paroi

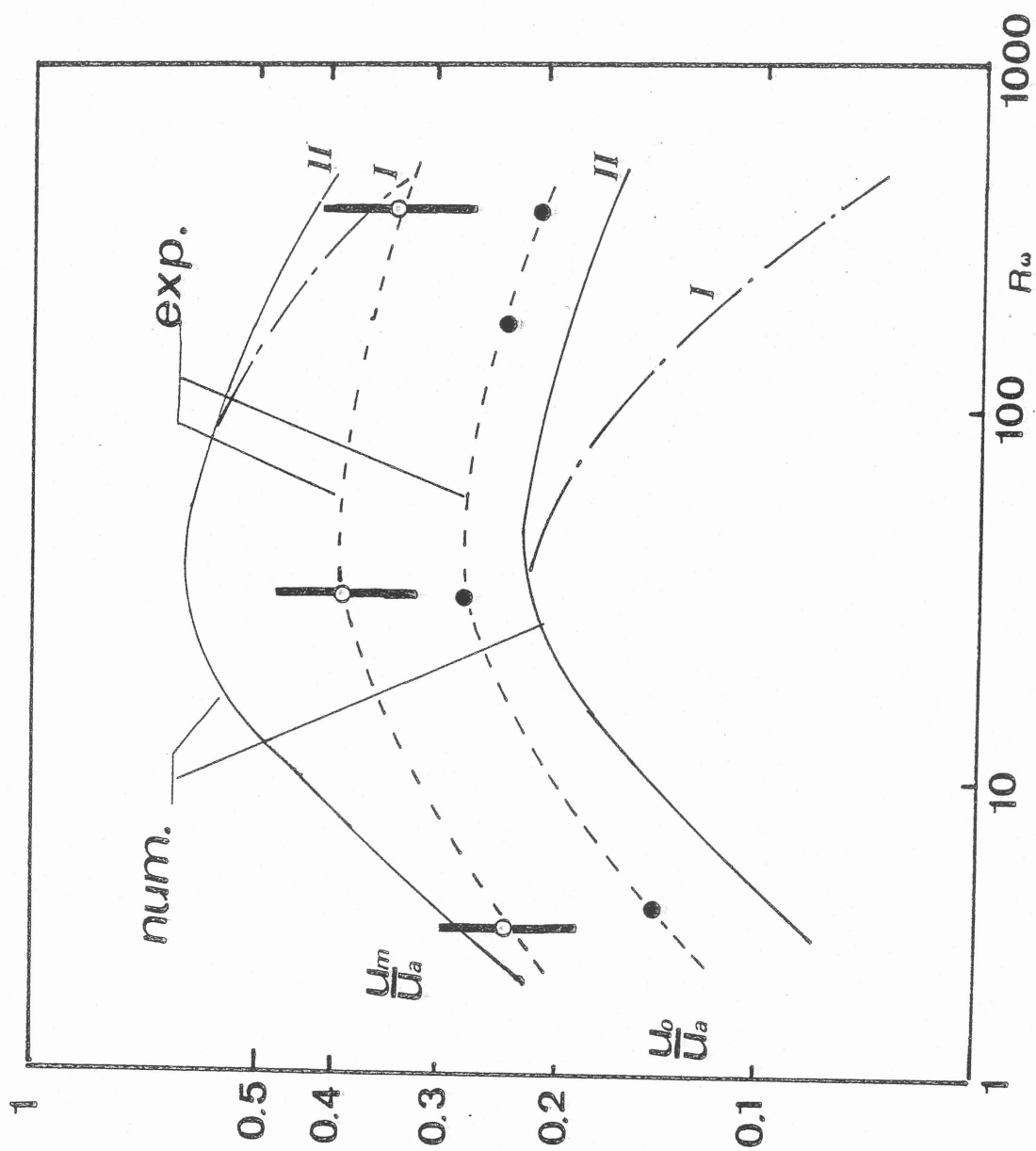


FIG. 9 : Evolution de la vitesse moyenne (normalisée par la vitesse d'Alfvén u_a) avec la fréquence.

u_0 : vitesse moyenne axiale moyennée le long de l'axe du creuset
 u_m : vitesse moyenne axiale maximale mesurée près de la paroi
 (les barres indiquant l'erreur absolue sur ces valeurs)

TROISIEME PARTIE

MISE AU POINT D'UNE SONDE ANÉMOMÉTRIQUE DIRECTIONNELLE POUR MÉTAUX LIQUIDES.

3.1. GENERALITES SUR LA VELOCIMETRIE DANS LES METAUX LIQUIDES.

La sonde anémométrique directionnelle, décrite dans ce présent chapitre, a été mise au point pour étudier les écoulements de recirculation engendrés électromagnétiquement dans un creuset de mercure (cf 1ère partie).

La particularité de l'écoulement étudié (recirculant et très turbulent) ainsi que la nature du fluide utilisé (faible nombre de Prandtl, milieu opaque) sont responsables des difficultés rencontrées, en ce qui concerne la vélocimétrie.

Parmi les capteurs classiques de vitesse locale et instantanée, seul le film chaud, isolé électriquement par une gaine de quartz, peut être envisagé. (Les méthodes de visualisations et l'anémométrie laser étant évidemment à exclure). Or l'utilisation de ce dernier ne va pas sans difficultés.

Tout d'abord en ce qui concerne le sens et la direction du vecteur vitesse, ce capteur qui n'offre pas une grande sensibilité dans les fluides usuels, fait preuve encore plus d'inefficacité dans les métaux liquides [1]. Quant à la détermination du module de la vitesse, elle nécessite un étalonnage soigné pour minimiser les incertitudes dues surtout à l'encrassement des parties sensibles du capteur et aux dérives thermiques du bain [2], [3].

Le fait d'être confronté à un écoulement recirculant et l'impossibilité de contrôler de façon permanente l'état d'encrassement des sondes, proscriit d'emblée ce type de capteur si l'on veut obtenir des mesures fiables avec une erreur relative ne dépassant pas les quelques pourcents.

Pour pallier ces difficultés, un nouveau type de sondes a été mis au point par Moore et Hunt [4], dont le principe est la mesure de l'effort engendré par l'écoulement sur un obstacle sphérique. Cette sonde remédie au problème d'encrassement et de fiabilité de la courbe d'étalonnage. Cependant, on peut lui reprocher de ne pas offrir une grande résolution spatiale ($\approx 2,5$ mm) et d'autre part, une imprécision sur sa sensibilité directionnelle qui est liée au montage des jauges de contraintes.

Un autre type de dispositif mis au point par Gönkel [5], utilisant deux sondes à film chaud, parallèles, alimentées par un anémomètre à température constante, permet, par une mesure différentielle, d'avoir accès au sens et au module de la vitesse. Cette sonde, utilisée pour déterminer les zones d'inversion du sens d'un écoulement alterné, suppose connue la direction de la vitesse et, pour la détermination du module, nécessite un étalonnage qui est toujours sujet à l'encrassement des sondes.

On peut encore citer le système mis au point par Bradbury, [6], pour effectuer des mesures dans un écoulement d'air très turbulent, où l'on utilise une sonde à trois fils dont l'un émet une impulsion de chaleur et les deux autres, de part et d'autre de l'émetteur, utilisés comme fils froids, détectent cette bouffée de chaleur convectée par le fluide. Cette sonde donne accès au sens de la vitesse et à son module, par la mesure du temps de transit de la bouffée de chaleur de l'émetteur au récepteur, ce qui la dispense d'un étalonnage. Comme précédemment, cette sonde ne permet pas la mesure de la direction de la vitesse.

La sonde que nous proposons est calquée sur le même principe d'émetteur-récepteur, à partir de deux films cylindriques, dont l'un est source de chaleur et l'autre, utilisé comme simple résistance, sert à mesurer la température. Cependant, le film émetteur peut effectuer un cercle presque complet autour de la sonde réceptrice, ce qui permet, après comparaison pour chaque position, de déterminer, là où la température sera maximale, le sens et la direction du vecteur vitesse.

D'autre part, en alimentant la sonde émettrice par un courant de chauffe sinusoïdal et en mesurant le déphasage de la température au niveau du récepteur (dû à la durée de convection), on accède au module du vecteur vitesse.

L'étude qui suit montre qu'en choisissant convenablement les paramètres (écartement des sondes, fréquence du courant de chauffe), on peut se passer d'un étalonnage.

3.2. DESCRIPTION TECHNOLOGIQUE DU DISPOSITIF.

La figure (1) montre une vue d'ensemble du dispositif de mesure utilisé.

Le système comprend un chariot qui autorise un déplacement des porte-sondes dans un plan vertical (R - Z), la position étant définie à partir de la sonde réceptrice. Un système de biellettes assure une rotation de 300° de la sonde émettrice autour de la sonde réceptrice, sur un rayon de 2 mm (fig. 2).

Le déplacement du chariot et la rotation sont effectués par des moteurs synchrones et les positions sont repérées à l'aide de potentiomètres, le tout étant piloté par un microordinateur par lequel on rentre le programme d'exploration.

La sonde émettrice de chaleur est une sonde cylindrique à film quartzé type DISA de caractéristiques :

- diamètre $d = 70 \mu\text{m}$
- Longueur totale $L = 5 \text{ mm}$
- Longueur partie sensible $l = 1.25 \text{ mm}$
- Epaisseur de quartz $e = 4 \mu\text{m}$
- Film : nickel

Sa géométrie permet de pouvoir envelopper la sonde réceptrice lors de la rotation (fig. 3).

Elle est alimentée soit par un courant continu maintenu constant, soit par un courant sinusoïdal selon que l'on accède au sens ou au module de la vitesse (voir plus loin).

La surchauffe engendrée par effet Joule est d'environ $\Delta T_c \approx 25^\circ\text{C}$ par rapport au milieu ambiant.

L'envoi de la surchauffe se fait également par l'intermédiaire du micro-ordinateur qui déclenche une alimentation autonome.

La sonde réceptrice est également une sonde cylindrique à film quartzé de même caractéristiques que la précédente, mais de plus petite longueur totale (3 mm).

La mesure consiste à enregistrer les variations de résistance du film dues aux variations de température. Pour cela, un courant très faible est envoyé dans la sonde réceptrice (5 mA) qui est montée sur un pont de

Wheatstone. Le pont est équilibré à température ambiante. On enregistre alors la tension aux bornes du pont que les variations de résistance déséquilibrent. Le signal recueilli, de l'ordre de quelques dizaines de micro-volts, est amplifié et filtré, l'acquisition se faisant par le micro-ordinateur suivant un enregistrement continu.

Le système a été conçu pour une exploration d'écoulement dans une géométrie axysymétrique (Creuset cylindrique). Les supports de sondes incurvés (fig. 1) permettent d'accéder dans les coins du creuset et amenuisent la perturbation due à leur présence dans le plan de mesure.

3.3. MESURES DE DIRECTION.

3.3.1. Principe et essais préliminaires.

Dans un premier temps pour accéder au sens et à la direction du vecteur vitesse, la sonde émettrice est alimentée par un courant continu dont on fixe la valeur de l'intensité. La chaîne de mesure utilisée dans ce cas est représentée en figure 4.

L'utilisation de cette sonde dans un milieu à faible nombre de Prandtl comme le mercure ($\approx 10^{-2}$), présente l'avantage d'avoir un bon échange thermique entre le film émetteur et le fluide, mais l'inconvénient de dissiper rapidement, par diffusion moléculaire, le sillage thermique engendré. Des essais préliminaires ont permis de s'assurer que dans de telles conditions, un sillage thermique était perceptible. Ils ont consisté à mesurer le sillage thermique laminaire à 4 mm derrière une sonde émettrice de diamètre 100 μm surchauffée à $\Delta T_c = 8.5^\circ\text{C}$ par rapport au milieu ambiant, pour deux vitesses d'écoulement, 1 cm/s et 5 cm/s ainsi que le sillage engendré par pure convection naturelle.

Ces essais ont été effectués dans l'installation expérimentale de Capéran [7] qui consiste à descendre les sondes à l'aide d'un chariot, dans une cuve verticale de mercure au repos.

L'intérêt de cette installation est de pouvoir contrôler les vitesses de descente, de façon précise. Elle a été également utilisée pour les étalonnages décrits en 3.4.

Les points expérimentaux présentés en figure (5), (qui correspondent à des nombres de Péclet, construits à partir de la distance entre les deux films, inférieurs à 40), montrent que le sillage thermique est discernable.

Les courbes en trait plein, correspondent aux sillages engendrés par une source ponctuelle émettant un flux de chaleur constant, dans un fluide en mouvement uniforme ; pour les mêmes vitesses 1 cm/s et 5 cm/s [8]. Une expression analytique de la distribution de température correspondante est donnée par l'expression :

$$(1) \quad \Delta T = \frac{q}{4\pi k_f} \frac{e^{-u(R-x)/2\chi}}{R}$$

où

- q est le flux de chaleur émis
- k_f la conductivité thermique du fluide
- χ la diffusivité thermique du fluide
- u la vitesse de l'écoulement
- R la distance radiale depuis la source
- x la distance depuis la source, dans la direction de l'écoulement

Les courbes théoriques ont été calées sur la valeur maximale de l'écart de température mesurée. Ces courbes enveloppent de façon assez bonne les points expérimentaux.

L'intérêt de cette comparaison, est de mettre en évidence la tridimensionalité du sillage thermique et de justifier ainsi, que l'écart de température maximale soit indépendant de la vitesse, comme le suggère la relation (1) et ce qui est à peu près bien vérifié par ces mesures. Elle permettra également de mettre en évidence l'effet de la turbulence sur ces sillages laminaires.

La figure 5 montre également l'importance de la convection naturelle. Les points expérimentaux obtenus sont assez proches de ceux mesurés avec une vitesse de convection de 1 cm/s, ce qui donne une idée de la vitesse minimale qu'on pourra détecter par cette méthode.

La détection étant donc possible dans un écoulement laminaire (compte tenu des limites dues à la convection naturelle qu'on vient de mettre en évidence), l'étape suivante est donc de tester la détection dans un écoulement très turbulent.

On peut déjà supposer, qu'étant donné le faible écartement entre les deux sondes choisies, (2 mm, ce qui correspond à des nombres de Peclet de l'ordre de 20 pour des vitesses de 5 cm/s), l'effet diffusif de la turbulence sera minime sur de telles échelles. Les essais effectués l'attestent effectivement.

La figure (6) montre l'exploration angulaire obtenue à partir, cette fois-ci, du dispositif directionnel, dans le creuset de mercure (sur l'axe où la vitesse mesurée au film chaud était de 2.8 cm/s et l'intensité turbulente d'environ 30 %).

Un maximum de température se distingue encore très nettement dans la direction $\theta_0 = 210^\circ$.

On a également porté sur cette figure, le sillage thermique qu'aurait engendré une source ponctuelle dans un écoulement laminaire de même vitesse. Il a été calculé toujours à partir de la relation (1) où cette fois-ci $x = R \cos (\theta - \theta_0)$.

On s'aperçoit que la turbulence élargit un peu le sillage mais que celui-ci reste, malgré tout, perceptible sans ambiguïté.

Par ailleurs, l'effet de la turbulence sur la diffusion thermique a pu être également quantifié de la façon suivante :

- La sonde émettrice alimentée par un courant sinusoïdal de fréquence f , émettait ainsi un flux de chaleur variant sinusoïdalement à la fréquence double. Le spectre du signal mesuré a permis ainsi de s'assurer que cette fréquence imposée $2f$, restait discernable parmi les fluctuations aléatoires de température.

Les spectres présentés en figures 7,8 ont été mesurés en deux régions distinctes de l'écoulement recirculant dans le creuset :

- . sur l'axe (fig. 7) où la vitesse est bien définie
- . au coeur du vortex (fig. 8) où la vitesse est nulle et l'intensité turbulente atteint 100 %.

Les pics correspondants à la fréquence $2f$ se détachent bien du bruit à large bande dans les deux cas. Là où l'intensité turbulente est très élevée (au coeur du vortex), le pic s'élargit et diminue en amplitude mais reste malgré tout discernable.

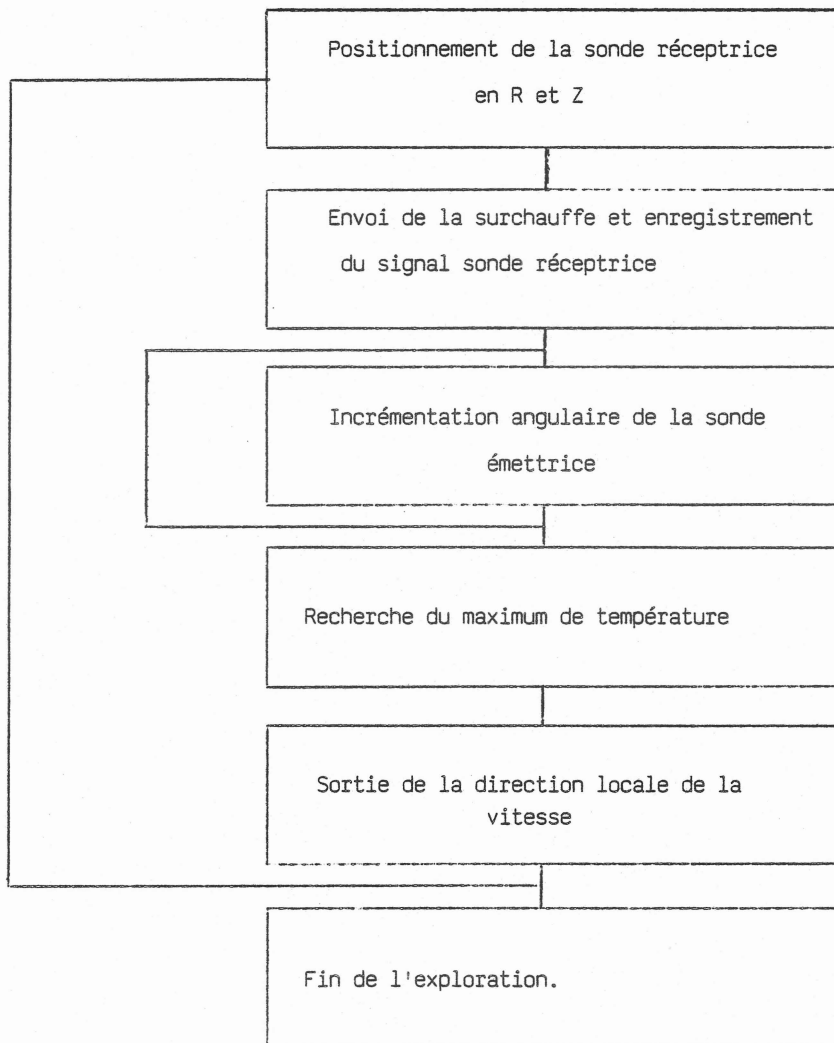
Ces derniers essais seront mis à profit lorsqu'il s'agira de mesurer le module de la vitesse (section 3.4).

3.3.2. Application : détermination des recirculations dans un creuset de mercure brassé électromagnétiquement.

On s'est proposé de mesurer à l'aide de cette sonde, les recirculations engendrées dans un creuset de mercure brassé électromagnétiquement à 50 Hz, la connaissance d'un tel écoulement ayant été acquise par ailleurs (cf 1ère partie).

L'écoulement moyen étant axysymétrique, on s'est contenté d'explorer un demi plan méridien.

La procédure d'exploration étant répétitive, celle-ci a pu être automatisée. Elle se décompose comme suit :



L'écoulement étant très turbulent, la détermination en un point donné de la direction de la vitesse moyenne, s'obtient après un certain temps d'intégration. Après plusieurs essais de convergence, cette durée a été fixée à 160 s.

La figure 9 montre les résultats de l'exploration de l'écoulement obtenue à partir d'une incrémentation de 15° en angle. L'exploration de l'écoulement en ces 45 points a nécessité environ 17 heures d'enregistrement, d'où l'intérêt de l'automatisation.

L'organisation de l'écoulement se fait en deux vortex contre-rotatifs conformément aux résultats connus (cf 1ère partie).

3.4. MESURE DU MODULE DE LA VITESSE.

3.4.1. Principe.

Ce système de sonde peut permettre également d'accéder au module de la vitesse de l'écoulement, si l'on peut mesurer le temps de transit de la chaleur d'un fil à un autre. La méthode la plus immédiate est celle utilisée par Bradbury [6], qui consiste à émettre une impulsion de chaleur et à mesurer le temps que met celle-ci pour transiter jusqu'à la sonde réceptrice. Or, dans le cas où la direction de la vitesse en un point varie de façon très aléatoire dans le temps, cette méthode ne peut être envisagée qu'en disposant l'émetteur par rapport au récepteur, de telle sorte que toutes les impulsions émises soient reçues par le récepteur. Mais dans ce cas on perd l'information direction. Dans notre cas, puisque l'émetteur et le récepteur sont alignés dans la direction de l'écoulement moyen, la détection d'une bouffée de chaleur émise par la sonde réceptrice n'est pas systématique. Il faut donc rechercher une corrélation entre l'émission et la détection, corrélation qui n'apparaît qu'au bout d'une certaine durée d'intégration. La méthode utilisée a donc été d'alimenter la sonde émettrice par un courant de chauffe sinusoïdal, celle-ci émet donc un flux de chaleur également sinusoïdal à la fréquence double du courant, et la sonde réceptrice reçoit donc aussi un flux à cette même fréquence mais déphasé par rapport au premier. La mesure de ce déphasage permet d'accéder au module de la vitesse de l'écoulement. On notera ψ , ce déphasage.

La chaîne de mesure utilisée dans ce cas est identique à celle décrite en figure 4, mais l'alimentation de la sonde émettrice est un générateur sinusoïdal. On fait simultanément l'acquisition de la tension d'alimentation (signal de référence) et du signal température délivré par la sonde réceptrice. Le déphasage entre ces deux signaux est calculé par le micro-ordinateur.

3.4.2. Etalonnage de la sonde.

Le déphasage entre le signal température mesuré sur la sonde réceptrice et le courant de chauffe de la sonde émettrice, peut être dû, d'une part, à la durée de transit de la bouffée de chaleur et, d'autre part, à l'inertie thermique des fils émetteurs et récepteurs. Pour des fréquences basses, on peut s'assurer que l'inertie thermique des fils est négligeable (cf annexe) et donc que la courbe d'étalonnage ne dépend plus que des mécanismes de transfert thermique dans le fluide, résultant d'un compromis entre diffusion et convection.

Ce dernier a pu être analysé en étudiant le champ de température engendré par une source de chaleur ponctuelle émettant un flux sinusoïdal de pulsation ω dans un écoulement uniforme de vitesse u .

Les calculs sont détaillés en annexe de cette partie.

Ainsi, la courbe d'étalonnage théorique présentée en figure 10 sous forme adimensionnelle

$$\frac{\alpha}{\psi} = f(Pe) \text{ pour } \alpha = 5$$

avec $Pe = \frac{uR}{\chi}$ nombre de Peclet

$$\alpha = \omega \frac{R^2}{\chi}$$

permet de distinguer les deux tendances asymptotiques :

- diffusion prépondérante $Pe \ll 1$

Le déphasage tend à être indépendant de la vitesse et tend vers

$$\psi_0 = \left(\frac{1}{2} \frac{\omega R^2}{\chi} \right)^{1/2} \quad (2)$$

- convection prépondérante $Pe \gg 1$

Le déphasage est dû uniquement au temps de transit par convection

$$t = \frac{R}{u} \text{ et tend vers } u = \omega \frac{R}{\psi}$$

Les points expérimentaux obtenus dans l'installation décrite en (3.3.1.) sont également portés sur cette figure. Très proches de la courbe théorique, ces points attestent que l'on peut utiliser cette courbe comme un étalonnage absolu. En effet, contrairement à l'étalonnage des sondes à film chaud classiques, très sujet à l'état d'encrassement des films et à la valeur de la surchauffe, ici ces problèmes n'interviennent plus.

La courbe montre même que pour des vitesses telles que $Pe > 4$, la vitesse peut être obtenue sans étalonnage par la relation très simple :

$$u = \omega \frac{R}{\psi} \quad (3)$$

3.4.3. Application : mesure de vitesse dans le creuset de mercure.

Cette méthode a été utilisée dans le four à mercure pour déterminer le profil radial de vitesse passant au cœur d'un vortex ainsi que la variation de la vitesse avec l'intensité des courants inducteurs. Ces mesures ont

pu être comparées avec celles obtenues auparavant par anémométrie à film chaud (cf 1ère partie).

Auparavant, quelques considérations et essais ont dû être pris en compte pour fixer la fréquence du courant de chauffe, ainsi que la durée d'intégration du signal.

- Choix de la fréquence du courant de chauffe.

Les calculs explicités en annexe montrent que du fait de l'atténuation de l'amplitude du signal par effet de peau, il valait mieux choisir la fréquence f de telle sorte que l'épaisseur de peau correspondante soit plus grande que l'écartement R entre les deux sondes, ce qui d'après la condition (C) de l'annexe, se traduit par la condition sur la fréquence f

$$(4) \quad f < \frac{\chi}{2\pi R^2}$$

Or, si on respecte cette condition, on s'aperçoit d'après (2) et (3) que les variations de phase sont déterminées par :

$$0 < |\psi| < 1 \quad \text{soit} \quad 0^\circ < |\psi^\circ| < 57^\circ$$

Du fait de la réponse non linéaire de la sonde, pour avoir une variation plus importante de la phase et ainsi avoir une meilleure précision, nous avons préféré sacrifier un peu la condition (4) en compensant par une amplification plus importante du signal, pour imposer plutôt la condition :

$$0 < |\psi^\circ| < 90^\circ$$

D'où, d'après la relation (2), si on pose $\psi_0 = 90^\circ$ avec $R = 2 \text{ mm}$, $\chi = 5 \times 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}$, on obtient :

$$f = 0.5 \text{ Hz et } \alpha = 5$$

- Durée d'intégration.

La durée nécessaire d'enregistrement du signal pour atteindre une valeur stationnaire de la vitesse est d'environ 2 mn. Ceci est illustré par la figure 11 où l'on présente la valeur moyenne de la vitesse en fonction du temps d'enregistrement.

- Résultats :

La figure 12 présente les variations de la vitesse moyenne en fonction de l'intensité du courant inducteur mesuré sur l'axe du creuset, par cette sonde et par le film chaud.

De même, la figure 13 présente un profil de vitesse mesuré par les deux types de capteurs.

Le très bon accord entre les mesures obtenues à l'aide de cette sonde sans précaution d'étalonnage et celles obtenues au film chaud où un étalonnage très soigné a été nécessaire, démontre la supériorité de la première méthode.

CONCLUSION

La sonde que nous venons de présenter s'est montrée très efficace pour déterminer la direction, le sens et le module du vecteur vitesse moyenne dans un écoulement recirculant et très turbulent.

En ce qui concerne la directionnalité, sa détermination est simple et sans ambiguïté et, du point de vue principe, sa généralisation à d'autres écoulements et surtout à d'autres fluides (métaux chauds par exemple) peut être envisagée moyennant éventuellement une adaptation du traceur.

En ce qui concerne la mesure du module, pour des nombres de Peclet supérieurs à 4, sa détermination est également simple. On peut lui reprocher cependant de ne pas offrir une réponse linéaire.

La sonde présente un défaut, qui est le temps nécessaire pour faire une mesure (environ 1/2 heure pour 1 point de mesure avec une précision de 15° en angle).

Une réduction de la durée d'exploration serait souhaitable. On pourrait l'envisager en n'effectuant que quelques incréments angulaires et à partir de là, extrapoler l'allure du sillage thermique en utilisant les profils théoriques universels, puisque les résultats présentés ici ont montré une bonne fidélité de ces profils aux mesures. Pour cela il faudrait faire la mesure du module simultanément à celle de direction et de sens, c'est-à-dire s'intéresser à la phase et au module du signal en même temps.

A N N E X E

Calcul théorique de la courbe d'étalonnage.

Les variations de température du film émetteur peuvent s'obtenir à partir de l'équation :

$$(1) \quad \underbrace{\rho_s c_s \frac{\pi d^2}{4} \ell \frac{d\theta_s}{dt}}_{\text{Chaleur emmagasinée}} = \underbrace{\frac{V^2}{r}}_{\text{Puissance électrique}} - \underbrace{k_f \ell Nu (\theta_s - \theta_f)}_{\text{Chaleur convectée par le fluide.}}$$

où : θ_s est la température de la sonde chauffante

θ_f est la température du fluide

ρ_s la masse volumique du film

c_s la capacité calorifique du film

d le diamètre du film

ℓ la longueur

k_f la conductivité thermique du fluide

Nu le coefficient d'échange thermique entre le film et le fluide

r la résistance électrique du film

V la tension appliquée aux bornes du film.

Si le film est alimenté par une tension alternative $V = V_0 e^{i2\pi ft}$ de fréquence f , si on suppose la résistance électrique du film indépendante de θ_s , la solution peut se mettre sous la forme

$$\theta = \theta_0 e^{i\omega t} \quad \text{avec} \quad \omega = 4 \pi f$$

et en remplaçant dans (1) on obtient :

$$(2) \quad \frac{V_0}{r} = \rho_s c_s \frac{\pi d^2}{4} \ell \left[(i\omega + \frac{1}{T_s}) \theta_{s0} - \frac{1}{T_s} \theta_{f0} \right]$$

où :

$$(3) \quad T_s = \frac{\rho_s c_s d^2}{4 k_f Nu}$$

est la constante de temps du film.

Si la fréquence f est telle que :

$$(A) \quad \omega \ll \frac{1}{T_s}$$

d'après (2) on s'aperçoit que l'inertie thermique du film peut être négligée par rapport au flux de convection.

La puissance Joule $\frac{V^2}{R}$ est donc dans ces conditions cédée entièrement au fluide.

*Application numérique :

On a les données suivantes :

$$d = 70 \mu\text{m} \quad l = 1,25 \text{ mm} \quad k_f = 10.3 \text{ W/m}^\circ\text{C}$$

$$\text{film en nickel : } \rho_s = 8.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \quad c_s = 0.44 \text{ kJ/kg}^\circ\text{C}$$

Nombre de Nusselt : dans les écoulements à faible nombre de Prandtl autour d'un cylindre pourvu que :

$$Rd \, Pr < 500$$

où

$$Rd = \frac{ud}{\nu} \quad \text{et} \quad Pr = \frac{\nu}{\chi}$$

avec : u vitesse de l'écoulement

ν viscosité cinématique

χ diffusivité thermique.

Grosh et Cess donnent [9] :

$$Nu = 1.015 (Re \, Pr)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{avec : } u = 5 \text{ cm/s} \quad \nu = 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s} \quad \chi = 0.05 \text{ cm}^2/\text{s}$$

$$\text{on trouve } Nu = 0.8$$

$$\text{d'où } T_s \sim 10^{-9} \text{ s}$$

Il est donc tout à fait facile de réaliser la condition (A).

*Calcul du champ de température et du déphasage :

Compte-tenu des dimensions du film émetteur (diamètre 70 μm , longueur 1.25 mm), celui-ci pourra être considéré comme une source ponctuelle émettant un flux de chaleur alternatif $\frac{V^2}{R}$ de pulsation ω , si on s'intéresse au champ de température suffisamment loin de la source. Dans notre cas, on s'intéresse au champ de température au niveau de la sonde réceptrice située à une distance $R = 2 \text{ mm}$ de la sonde émettrice. On peut montrer que dans ce cas le

volumme occupé par le film émetteur est bien inférieur au volume de la sphère de rayon R

$$\pi d^2 l \ll \frac{4}{3} \pi R^3$$

et vu son allongement réduit par rapport à l'écartement :

$$l < R$$

On pourra considérer la source comme ponctuelle.

La petitesse de la source justifie que l'on néglige le sillage hydrodynamique qu'elle engendre. Cette hypothèse se trouve encore renforcée dans un milieu à faible nombre de Prandtl puisque le sillage hydrodynamique, beaucoup plus fin que le sillage thermique, n'amène pour ce dernier, qu'une perturbation à l'écoulement extérieur uniforme. Le champ de température engendré par une source ponctuelle émettant un flux de chaleur $\frac{V^2}{\kappa}$ sinusoïdal de pulsation ω dans un milieu infini ayant une vitesse uniforme u par rapport à la source, a été calculé par Podolsky [10].

La solution trouvée s'écrit :

$$\theta_R - \theta_\infty = \frac{V_o^2}{\kappa} \frac{1}{4\pi R_f R} e^{-(R-x)\frac{u}{2X}} \{1 - \exp\left[\frac{-Ru}{2X} \left(\left(\frac{c+1}{2}\right)^{1/2} - 1\right)\right] \times \cos\left(\omega t - \frac{Ru}{2X} \left(\frac{c-1}{2}\right)^{1/2}\right)\} \quad (4)$$

où

θ_R est la température au niveau de la sonde réceptrice

θ_∞ est la température ambiante du fluide

x est la distance depuis la source dans la direction de l'écoulement

$$c = (1 + 16\omega^2 X^2 / u^4)^{1/2}$$

Les autres paramètres étant définis par la relation (1).

*Choix de la fréquence :

On aura intérêt à choisir la fréquence du courant de chauffe telle que l'argument de la deuxième exponentielle de la relation (4) soit faible pour obtenir le maximum de signal d'où :

$$(B) \quad \text{Arg} = \frac{Ru}{2X} \left[\left(\frac{c+1}{2}\right)^{1/2} - 1 \right] \ll 1$$

soit avec les variables $Pe = \frac{Ru}{X}$ et $\alpha = \omega \frac{R^2}{X}$

$$\text{Arg} = \frac{Pe}{2} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + 16 \left(\frac{\alpha}{Pe^2}\right)^2\right)^{1/2} - 1 \right) \right] \ll 1$$

Si $Pe \rightarrow 0$ $Arg \rightarrow \sqrt{\frac{\alpha}{2}} = \frac{R}{\delta_{th}}$ où $\delta_{th} = \sqrt{\frac{2X}{\omega}}$ épaisseur de peau thermique

Si $Pe \gg 1$ $Arg \rightarrow \frac{\alpha^2}{Pe^3} \ll 1$

Dans le cas $Pe \gg 1$ la condition (B) est réalisée, pour la satisfaire dans le cas $Pe \rightarrow 0$, il faut donc choisir ω telle que :

$$\frac{R}{\delta_{th}} \ll 1$$

soit : (C) $\omega \ll \frac{2X}{R^2}$

*Calcul du déphasage :

Avec les variables adimensionnelles α et Pe le déphasage s'écrit :

$$(5) \quad \phi = \frac{Pe}{2} \left[\frac{1}{2} \left(1 + 16 \left(\frac{\alpha}{Pe^2} \right)^2 \right)^{1/2} - \frac{1}{2} \right]^{1/2}$$

Si $Pe \rightarrow 0$ $\phi \rightarrow \phi_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} = \frac{R}{\delta_{th}}$

Si $Pe \gg 1$ $\phi \rightarrow \frac{\alpha}{Pe} = \omega \frac{R}{u}$

B I B L I O G R A P H I E

- [1] HILL J.C. and SLEICHER C.A., 1971 : "Directional sensitivity of Hot film Sensors in Liquid Metals".
Rev. Sci. Instr., Vol. 42, N° 10, 1461-1468.
- [2] MALCOLM D.G., 1969 : "Some aspects of turbulence measurement in liquid mercury using cylindrical quartz-insulated hot-film.sensors".
J. Fluid. Mech, 37, 701-713.
- [3] TRAKAS C., TABELING P. and CHABRERIE J.P., 1983 : "Low-velocity calibration of hot-films sensors in mercury".
J. Phys. E. : Sci. Instrum. Vol. 16, 568-570.
- [4] MOORE D.J. and HUNT J.C.R., 1981 : "Electromagnetic stirring in the coreless induction furnace".
Proc. 3rd Beer-Sheva Symposium on MHD Flows and Turbulence Ed. A. Branover and A. Yakhot - Israel University Press.
- [5] GÜNKEL A., PATEL R.P. and WEBER M.E., 1971 : "A shielded hot-wire probe for highly turbulent flow and rapidly reversing flows."
Ind. Eng. Chem. Fundam., Vol. 10, N° 4, 627-631.
- [6] BRADBURY L.J.S. and CASTRO I.P., 1971 : "A pulsed wire technique for velocity measurements in highly turbulent flows".
J. Fluid. Mech., Vol. 49, N° 4, 657-691.
- [7] CAPERAN P. : "Contribution à l'étude expérimentale de la turbulence homogène M.H.D., première caractérisation de son anisotropie".
Thèse de Docteur Ingénieur, 7 décembre 1982, présentée à l'U.S.M.G. et l'I.N.P.G.
- [8] CARSLAW and JAEGER : "Conduction of heat in solid".
2nd Edition, Oxford University press, 1959.
- [9] ECKERT E.R.G. and DRAKE J.R. : "Analysis of heat and mass transfer".
International Student Edition. Mc Graw-Hill International Book Company.

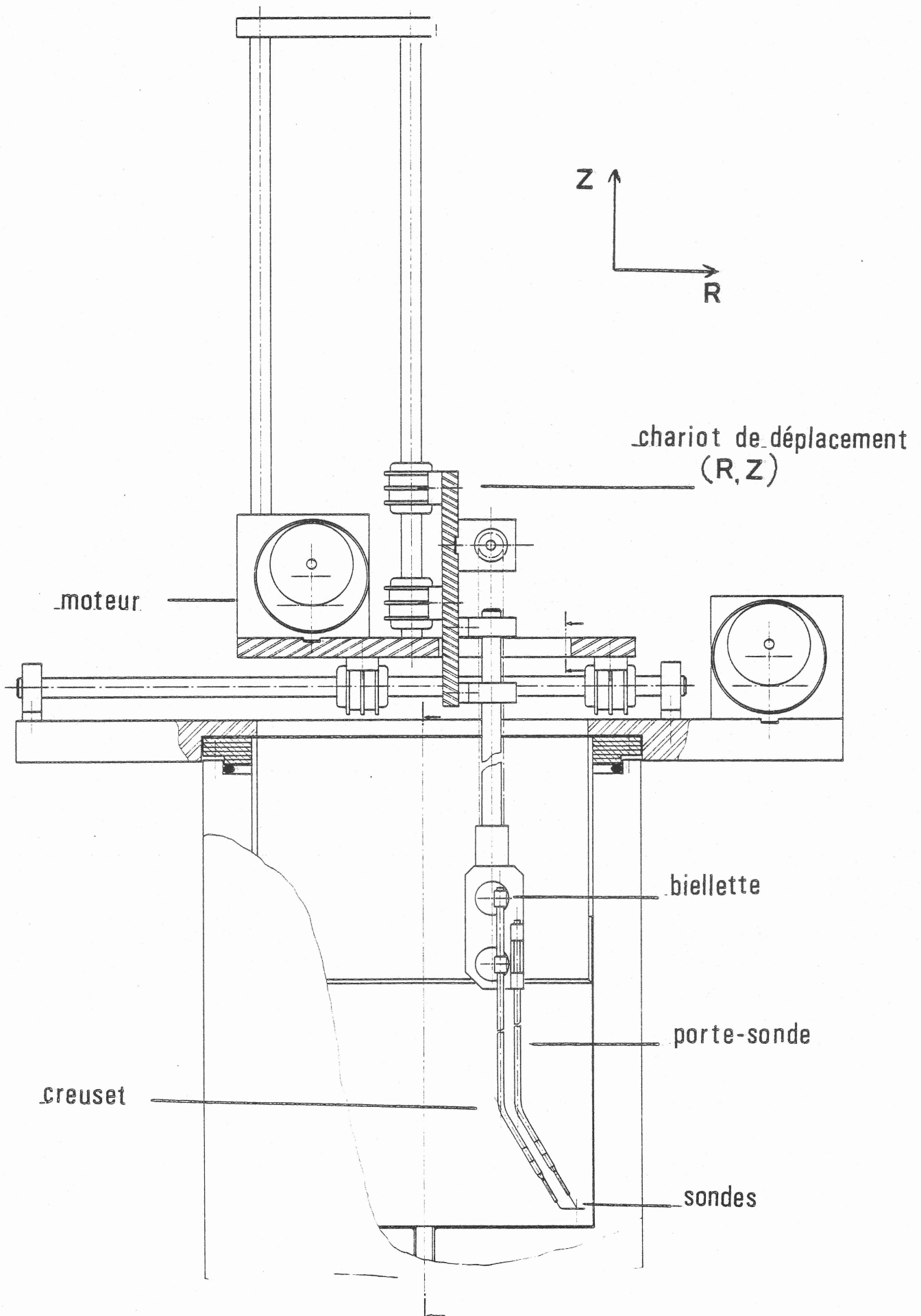


FIG. 1 : vue d'ensemble du dispositif de mesure

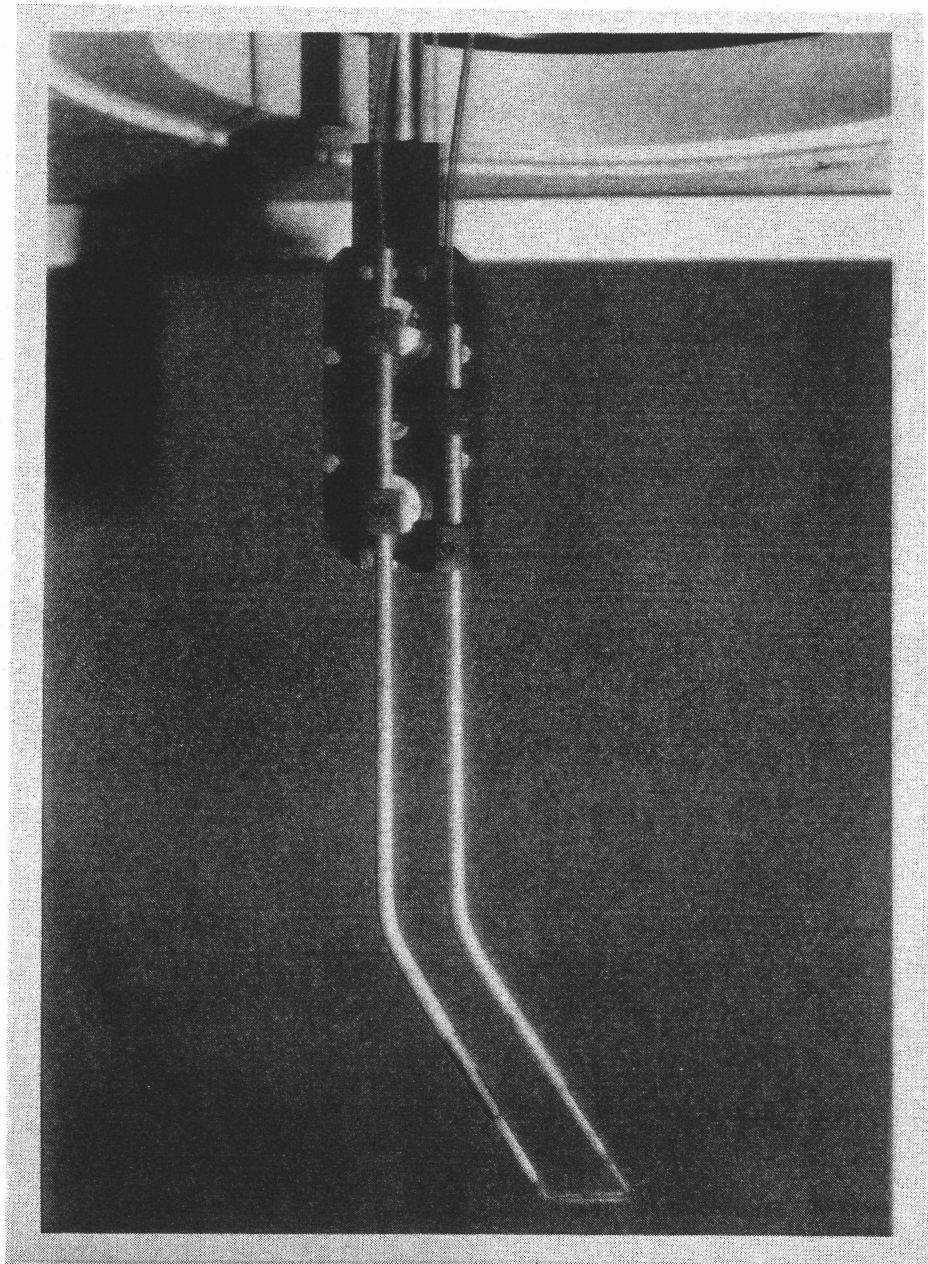


FIG. 2 : Détail du système de rotation des sondes

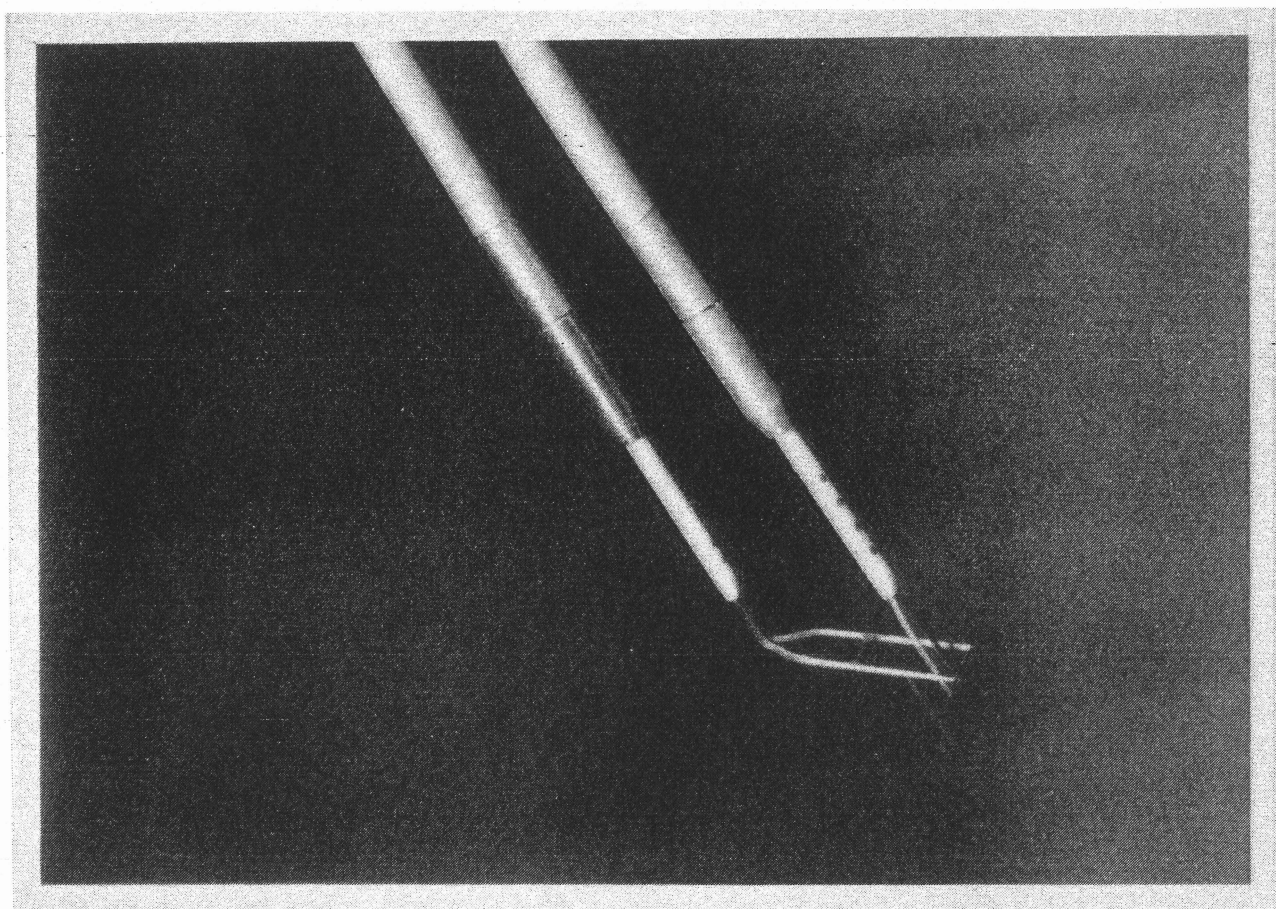


FIG. 3 : Détail des positions relatives des sondes

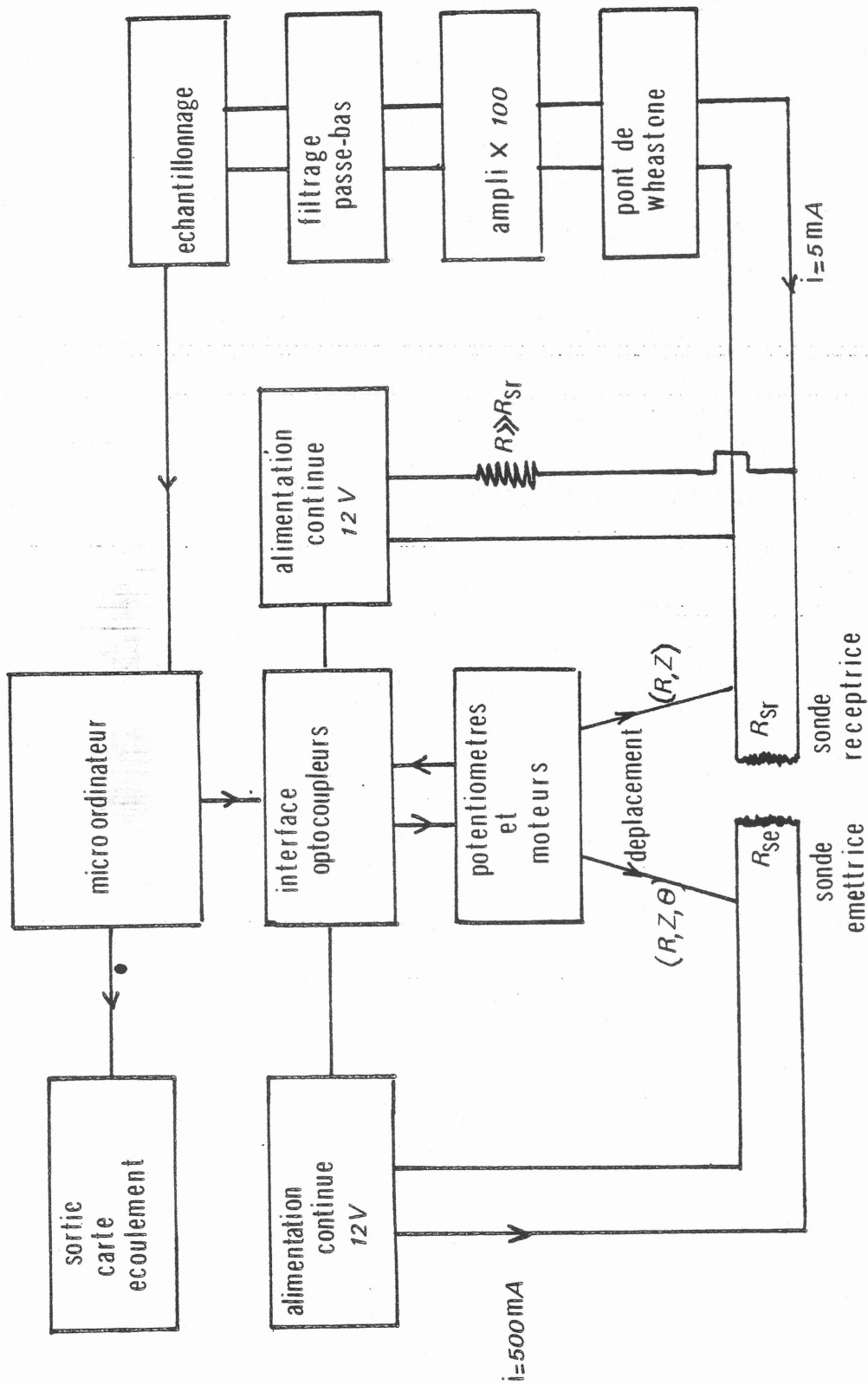


FIG. 4 : Chaîne de mesure pour la détermination du sens de la vitesse

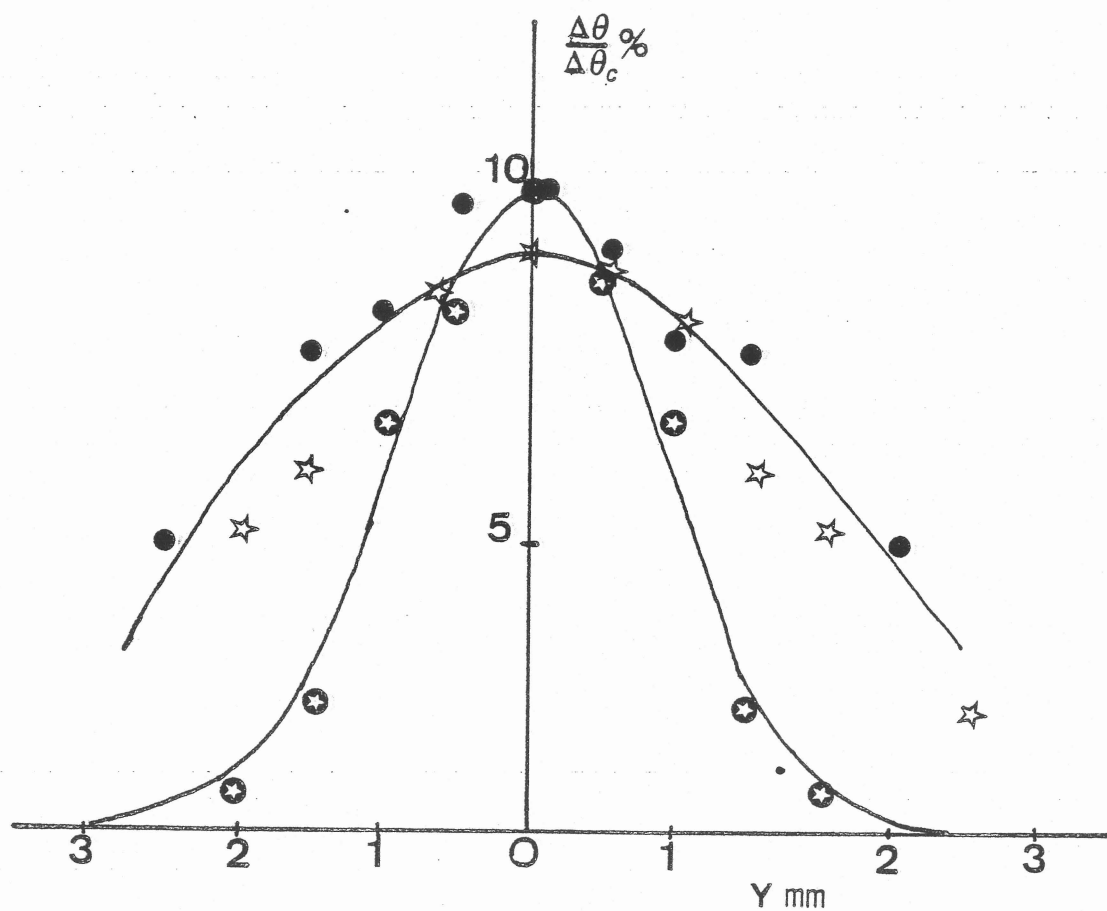


FIG. 5 : Sillages thermiques laminaires mesurés à 4 mm de la source

- ⊗ $u = 5$ cm/s
- ☆ $u = 1$ cm/s
- Sillage de convection naturelle
- Courbe théorique

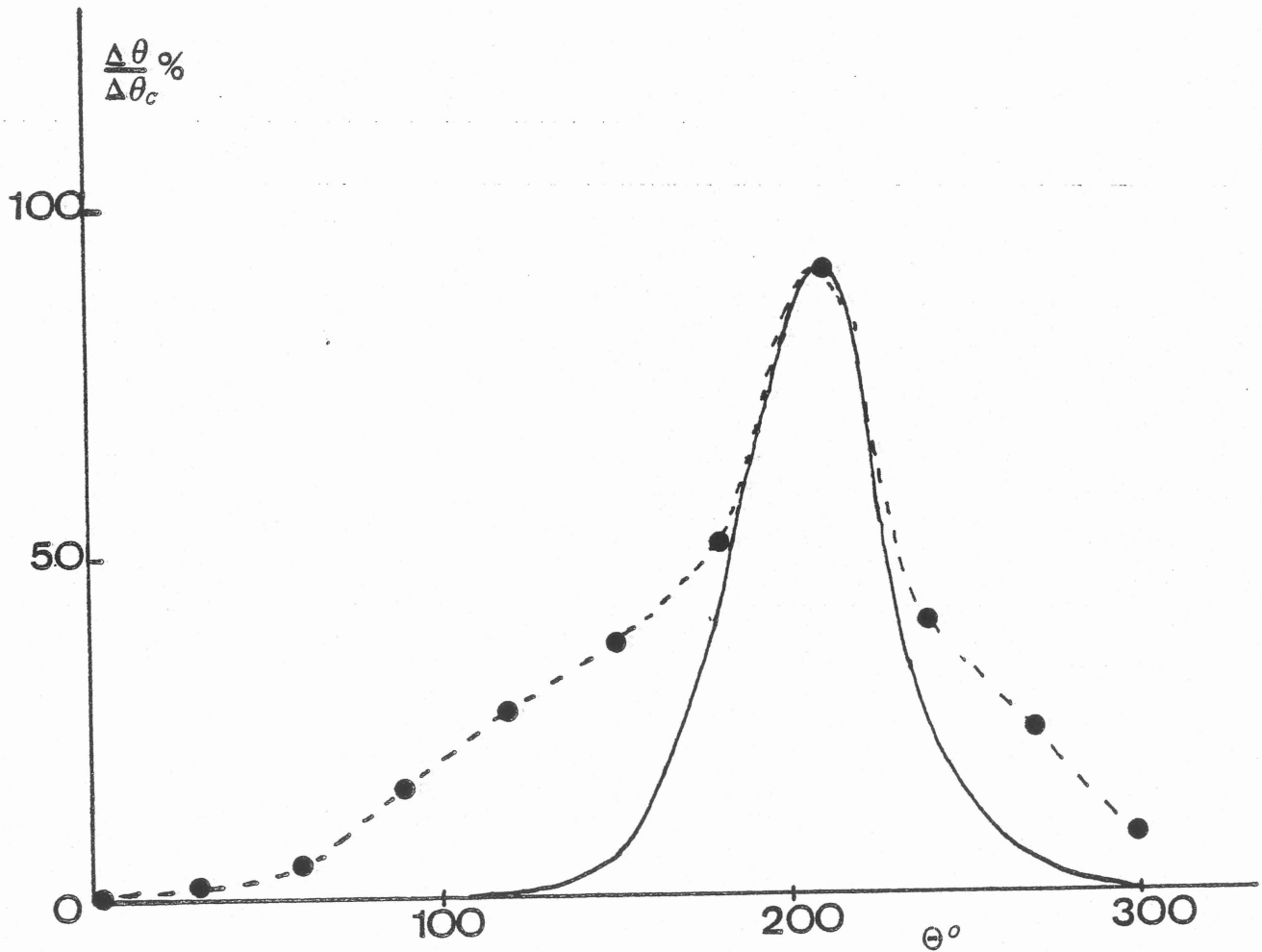


FIG. 6 : Exploration angulaire du sillage thermique en écoulement turbulent

● Points expérimentaux $\bar{u} = 2.8 \text{ cm/s}$

— Sillage laminaire théorique $u = 2.8 \text{ cm/s}$

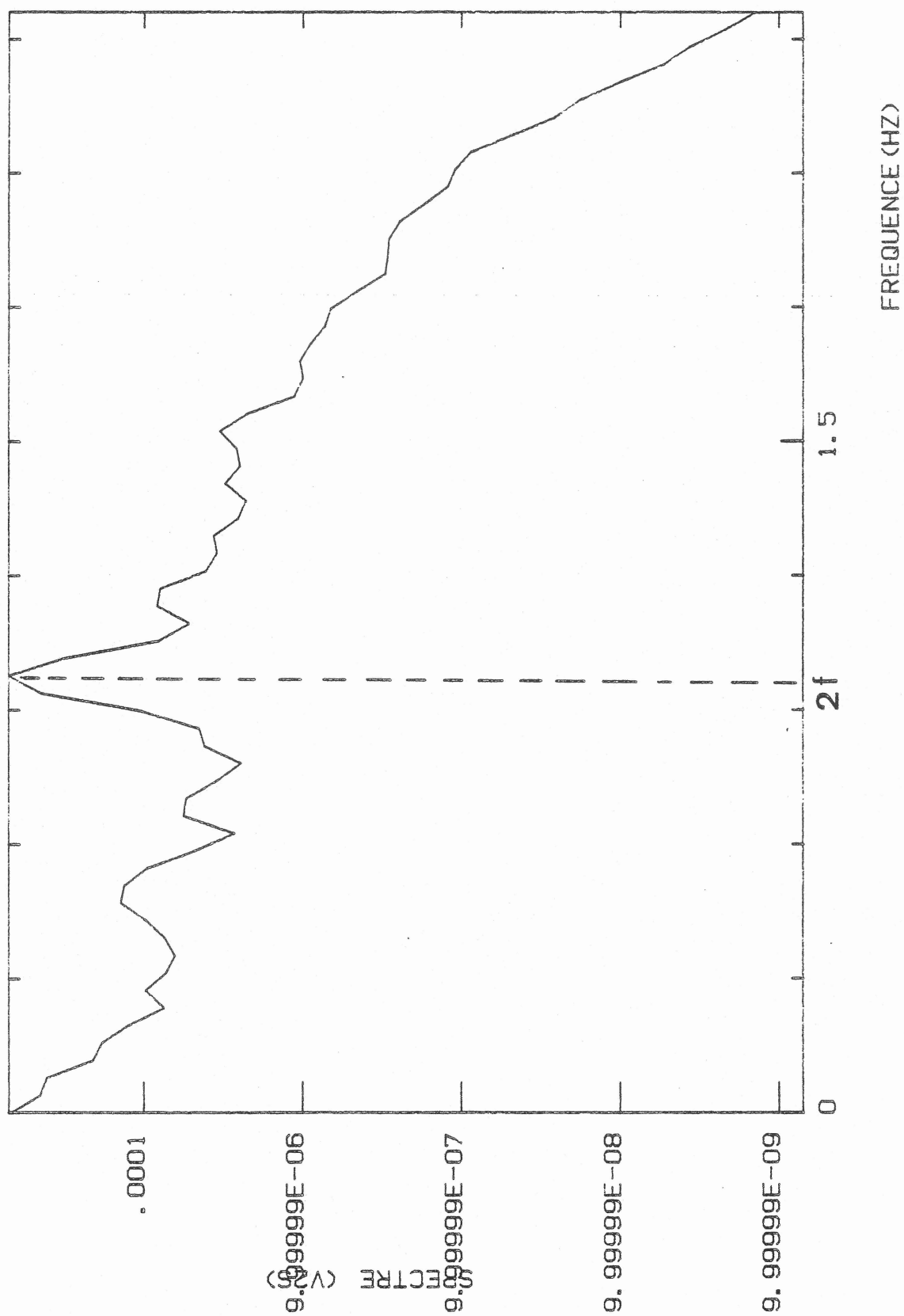


FIG. 7 : Spectre du signal température mesuré en $r/a = 0$ $z/H = 0.2$

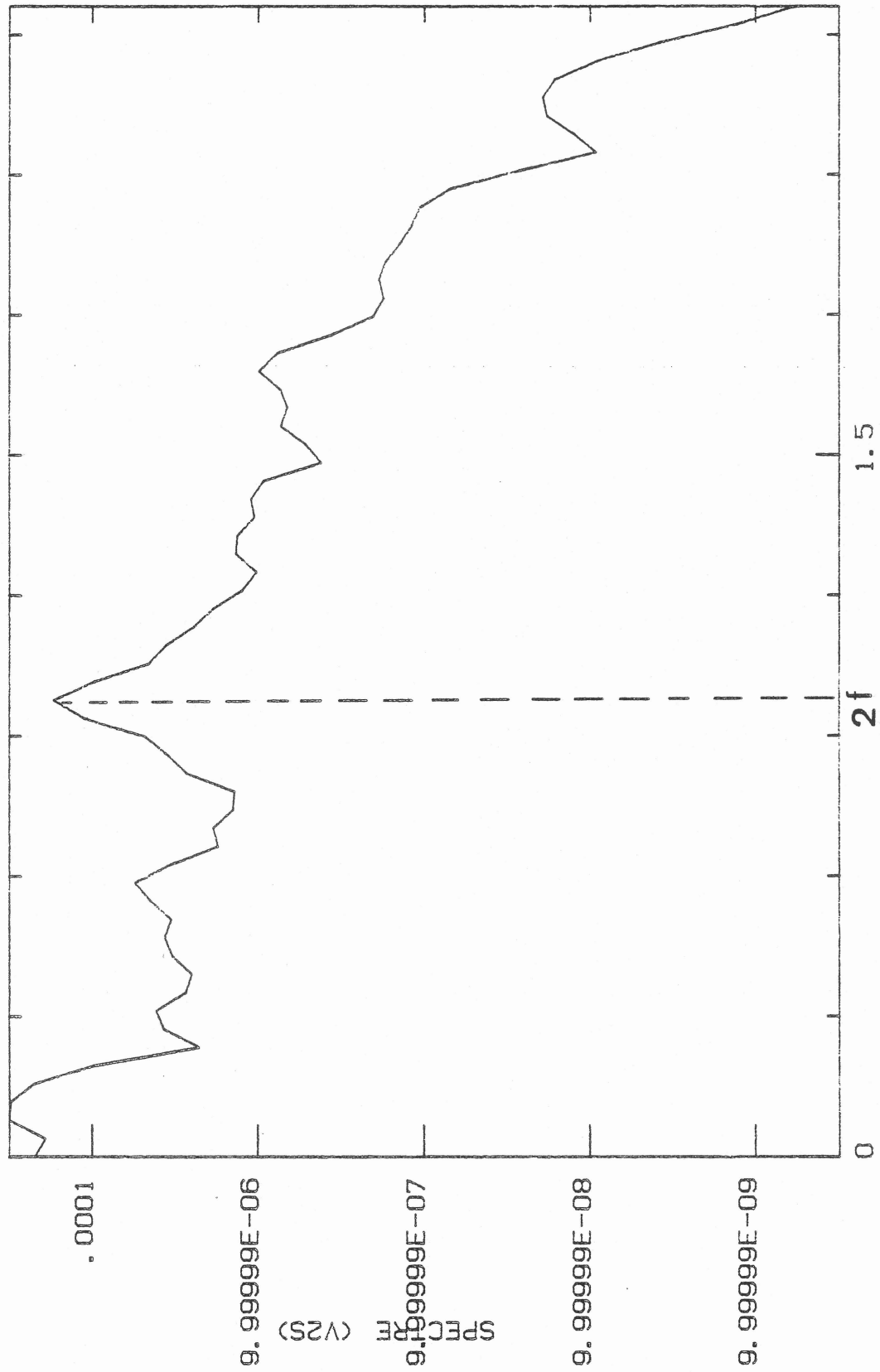


FIG. 8 : Spectre du signal température mesuré en $r/a = 0.7$ $z/H = 0.2$

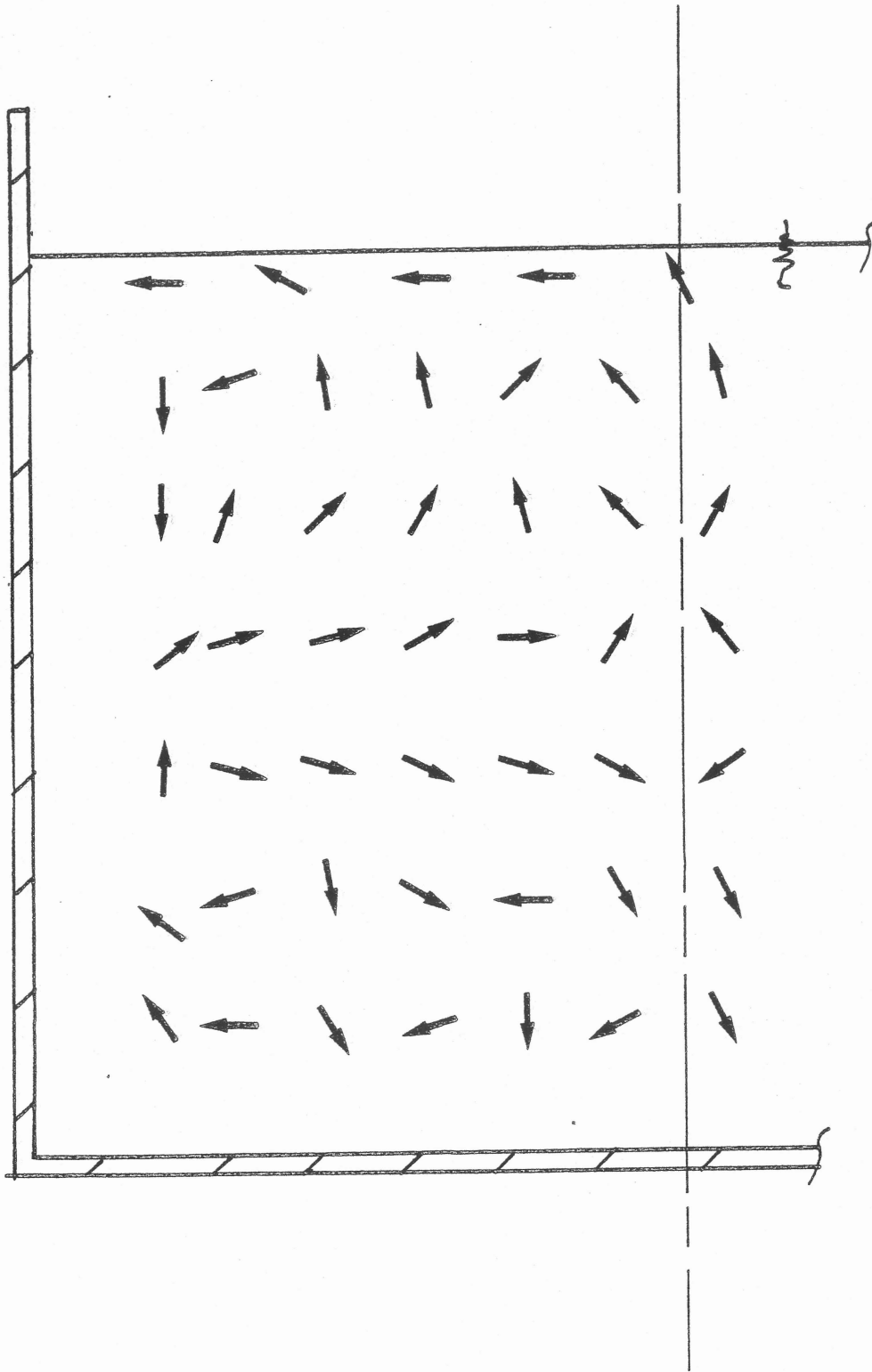


FIG. 9 : Configuration de l'écoulement mesurée à 50 Hz

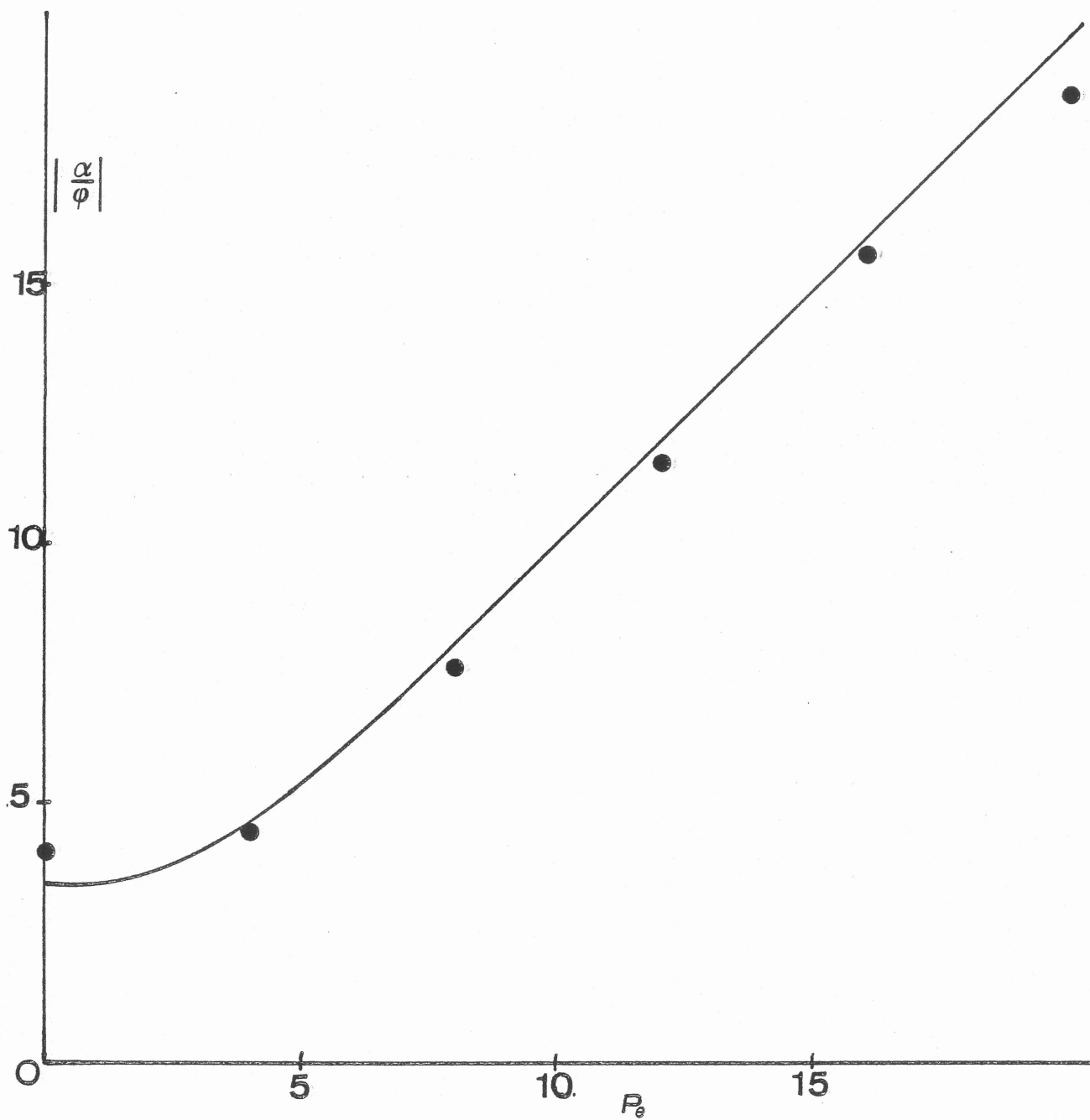


FIG. 10 : Courbe d'étalonnage de la sonde

● Points expérimentaux
— Courbe théorique

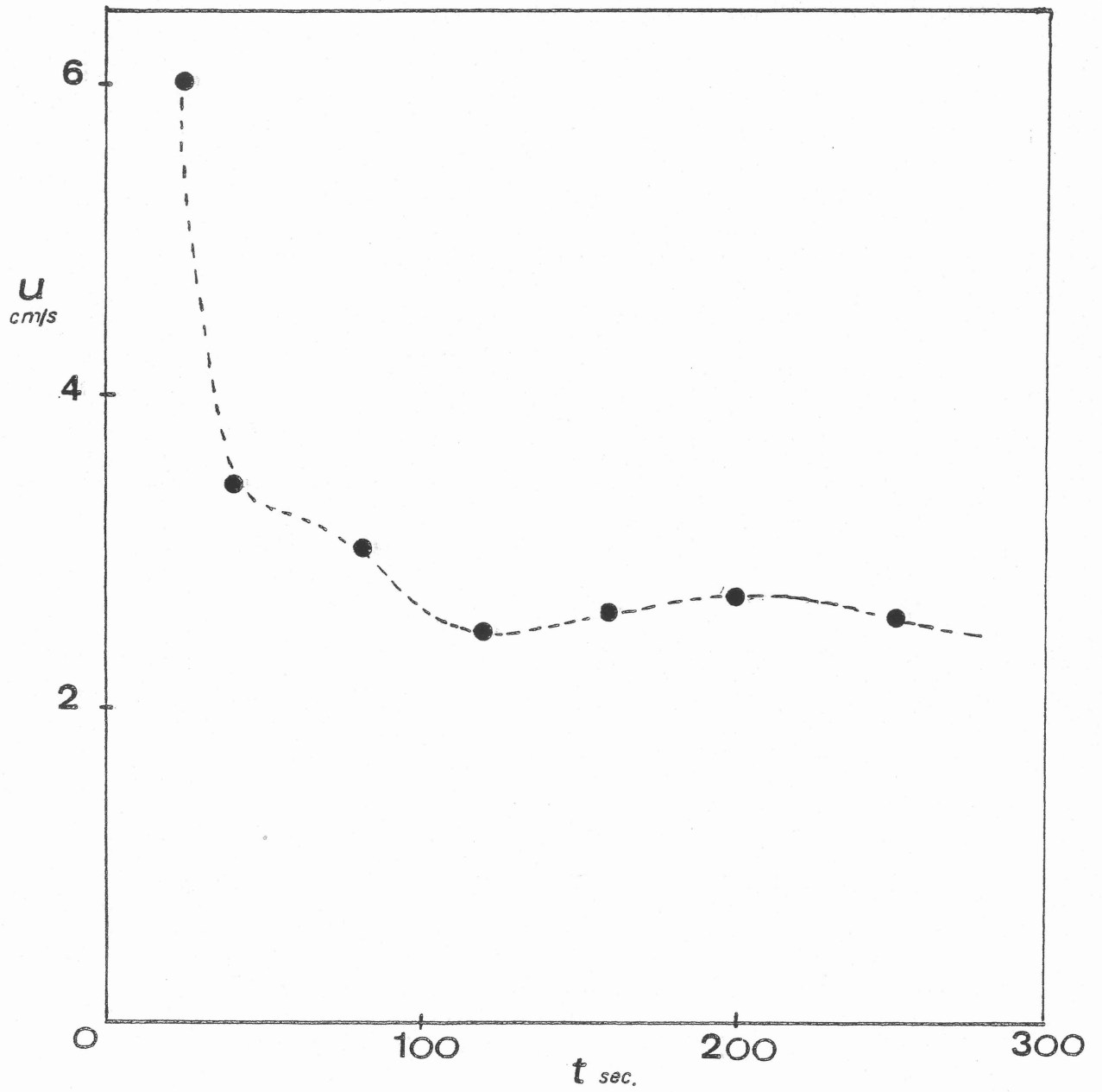


FIG. 11 : Convergence de la vitesse moyenne avec la durée d'intégration

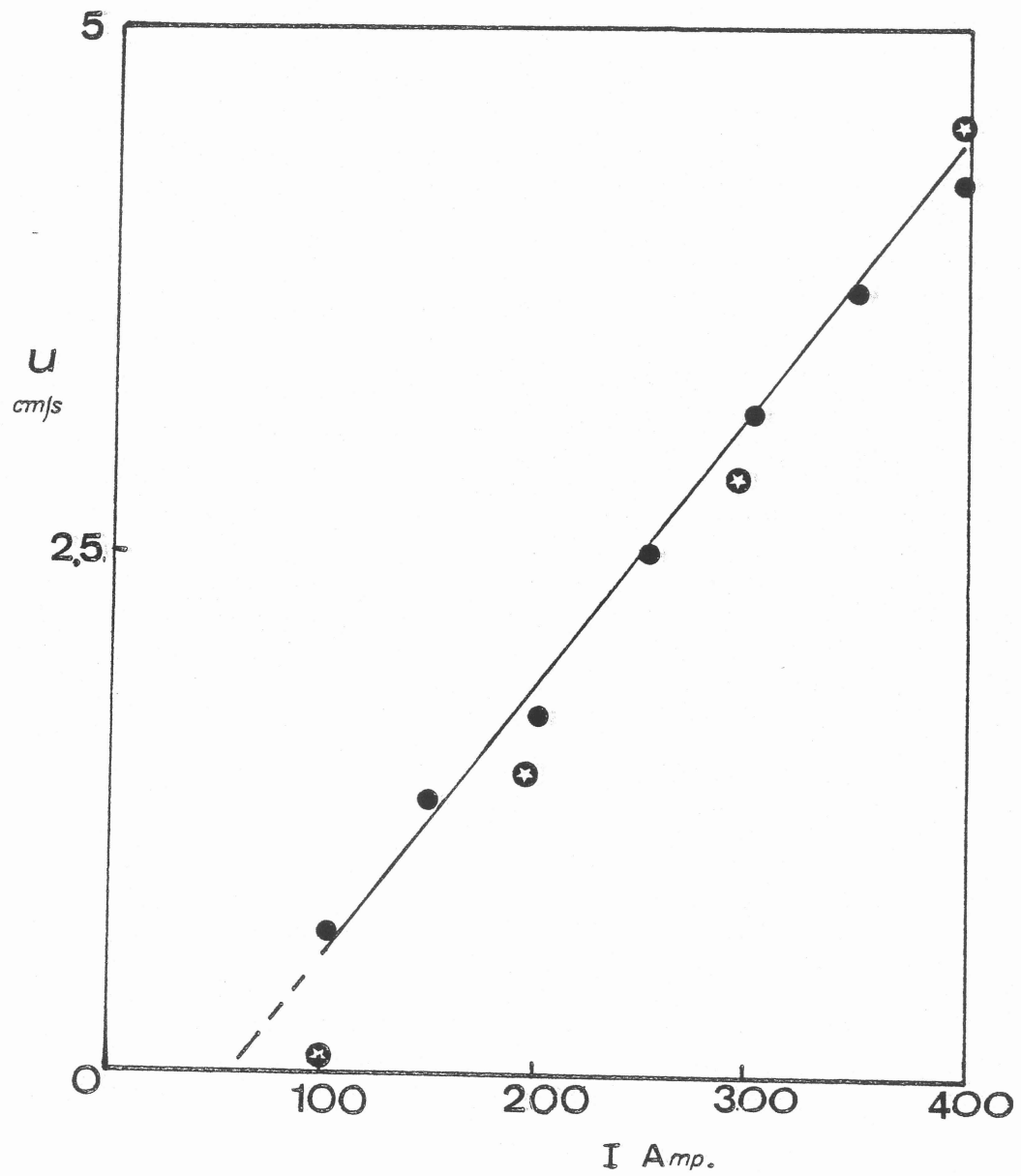


FIG. 12 : Variation de la vitesse moyenne en fonction du courant inducteur

- Points expérimentaux mesurés au film chaud
- ★ Points expérimentaux mesurés avec la sonde directionnelle

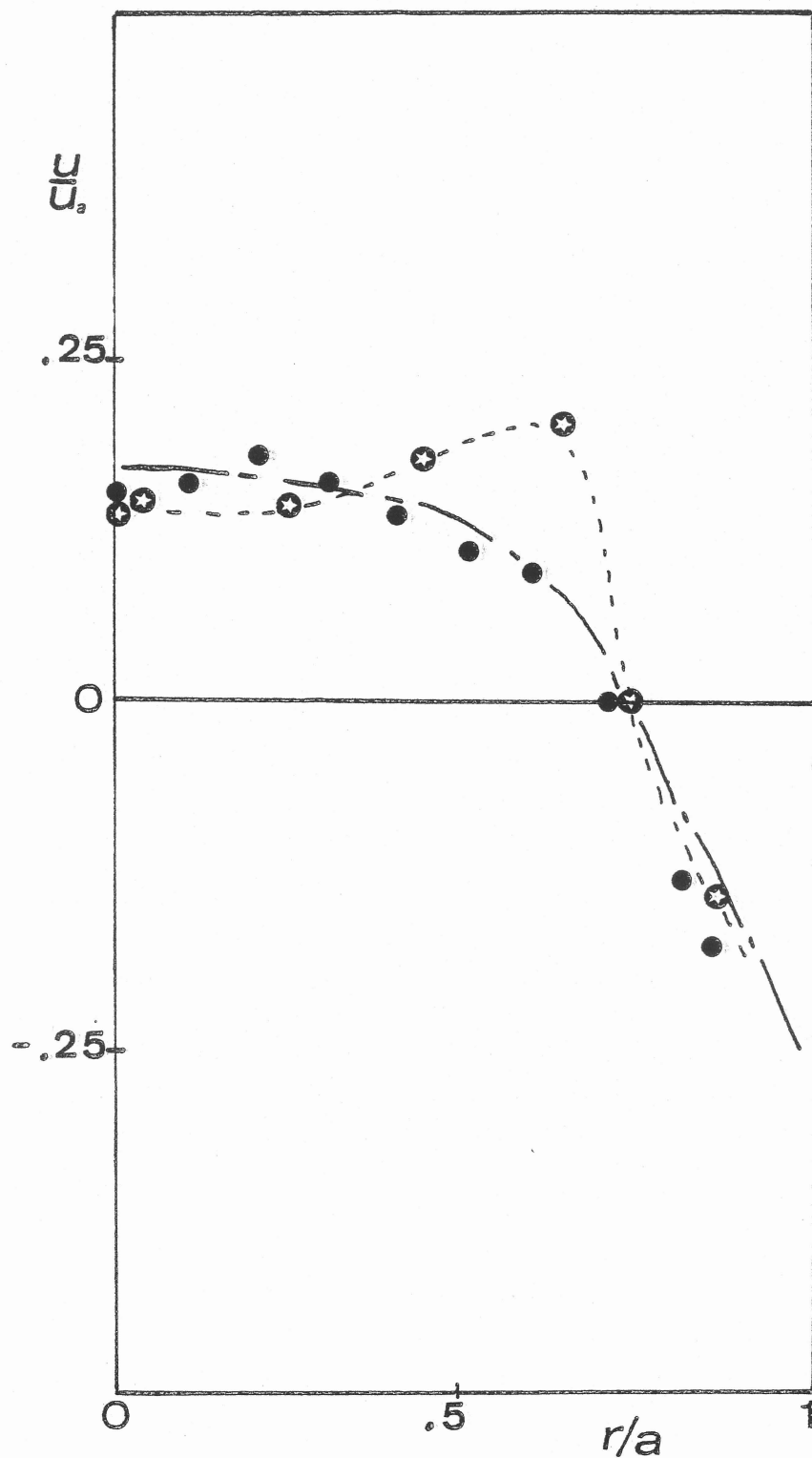


FIG. 13 : Profil de vitesse au coeur d'un vortex

● Points expérimentaux mesurés au film chaud

★ Points expérimentaux mesurés avec la sonde directionnelle

CONCLUSION

CONCLUSION

Aux incertitudes subsistant dans la connaissance de l'hydrodynamique des fours à induction mentionnées en introduction, le travail présenté ici amène des éclaircissements qui élargissent la connaissance dans ce domaine.

Il est confirmé désormais, qu'à toute fréquence, l'intensité des courants inducteurs ne contrôle que les niveaux des vitesses moyennes et turbulentes, et a un rôle passif vis-à-vis de la géométrie de l'écoulement à savoir : la configuration de l'écoulement moyen, la forme des profils de vitesse, les échelles intégrales de turbulence. Ce résultat est imputable, d'une part, au fait que ce paramètre ne modifie pas la distribution des forces motrices et d'autre part, au fait que, étant à grand nombre de Reynolds, l'écoulement à grande échelle devient indépendant de ce paramètre.

Le paramètre fréquence des courants inducteurs dont dépend la pénétration des forces motrices dans le bain est responsable d'effets beaucoup plus sensibles. Il contrôle en effet la taille et le nombre de recirculations engendrées dans le bain. Cependant, la loi d'évolution n'apparaît pas de façon immédiate. Elle nécessiterait l'étude approfondie du décollement des couches limites. L'incidence de la fréquence sur la forme des profils de vitesse est peu importante. On peut encore invoquer ici, l'universalité de la distribution de vorticités le long des lignes de courant due au grand nombre de Reynolds de l'écoulement. Un des aspects particuliers de ce paramètre est d'engendrer deux régimes d'écoulement se raccordant en un point où le brassage est maximum. Ces deux régimes résultent d'un compromis entre deux effets : d'une part, l'amplitude des forces croît avec la fréquence mais d'autre part, leur volume d'action diminue.

Dans le régime des basses fréquences, c'est la croissance de l'amplitude des forces qui prime et on a donc une croissance de la vitesse en fonction de la fréquence. Au contraire, dans le cas des hautes fréquences, l'effet de diminution de la zone d'action des forces l'emporte sur la croissance de leur amplitude et on assiste à une décroissance de la vitesse.

Une conséquence intéressante du confinement des forces est l'apparition, dans le cas des faibles épaisseurs de peau, d'une région singulière de l'écoulement, source de vorticité, qui se traduit par une caractérisation de la turbulence différente de celle générée au sein même de l'écoulement. Cette zone pariétale se manifeste par un accroissement local des quantités :

fluctuations turbulentes et taux de dissipation, qui s'accompagne d'une diminution d'échelle intégrale. Outre le fait que cette région se distingue des couches limites classiques de paroi et nécessite donc une attention particulière pour les problèmes de modélisation numérique, il faut s'attendre à ce que les transferts turbulents se singularisent également dans cette région. Ce phénomène peut donc avoir des conséquences métallurgiques importantes sur les réactions chimiques au voisinage des parois et de la surface libre.

La prédiction de l'écoulement turbulent par un modèle type $k-\epsilon$ s'est montr e tout à fait satisfaisante dans les cas considérés ici, à condition toutefois d'adapter les conditions limites à la physique du phénomène. Le cas des hautes fréquences est particulièrement intéressant puisqu'il donne une expression explicite de la contrainte à la paroi, ce qui permet de s'affranchir d'un artifice de conditions limites arbitraires et conduit à une prédiction plus réaliste du phénomène.

Les premiers résultats procurés par la sonde directionnelle sont déjà encourageants et invitent à continuer l'exploitation de cette sonde afin d'étudier l'influence de paramètres non pris en compte ici ; par exemple, le décentrement du four par rapport à l'inducteur, paramètre dont dépend grandement l'organisation de l'écoulement moyen. L'étape ultérieure concernant la généralisation de cette sonde serait l'adaptation de cette méthode de mesure à des métaux chauds afin de fournir une métrologie quasiment inexistante dans de tels contextes.

L'étude que nous venons de présenter a montré que l'hydrodynamique des fours à induction était un sujet riche et original de la mécanique des fluides, par le simple fait qu'on peut agir sur l'écoulement en modulant la zone d'action des forces motrices. Le sujet n'est pas pour autant  puis  puisqu'il resterait pour compléter ce travail, l'étude de l'écoulement à des fréquences de courants inducteurs suffisamment basses pour que la partie

pulsatoire des forces ne deviennent plus négligeables. L'écoulement est alors au premier ordre purement alternatif et, cette fois-ci, au lieu d'introduire une échelle spatiale caractéristique dans le spectre de turbulence, (l'épaisseur de peau), on introduit une échelle caractéristique temporelle qui est la fréquence double de celle des courants inducteurs. Ce fait constitue une nouvelle originalité des écoulements de brassage dans les fours à induction. Son étude constituerait certainement un enrichissement des connaissances dans ce domaine et pourrait présenter un intérêt métallurgique puisqu'il a déjà été montré qu'un brassage alterné améliorerait de façon significative les propriétés métallurgiques du produit élaboré (voir par exemple [1]).

xxxx

Bibliographie :

- [1] MEYER J.L., 1983 : "Influence de la convection ou du brassage électromagnétique sur la solidification de lingots d'aluminium".

Thèse de Docteur-Ingénieur présentée à l'I.N.P.G. le 28 novembre 1983.

AUTORISATION de SOUTENANCE

VU les dispositions de l'article 3 de l'arrêté du 16 avril 1974,

VU les rapports de présentation de Messieurs

- . FAUTRELLE, Maître Assistant
- . BIRAT, Ingénieur

Monsieur TABERLET Eric

est autorisé à présenter une thèse en soutenance pour l'obtention du diplôme de
DOCTEUR-INGENIEUR, spécialité "Mécanique".

Fait à Grenoble, le 28 juin 1984

Le Président de l'I.N.P.-G



D. BLOCH

Président

de l'Institut National Polytechnique
de Grenoble

P.O. le Vice-Président,

